Complemento ortogonale

V spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle\, ,\rangle$.

Teor. $\dim V < \infty \Rightarrow \dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Dim. $\dim V = n$. $(u_1, \ldots, u_k)$ base ortonormale per $U \rightsquigarrow u_1, \ldots, u_n$ completamento della base ortonormale $\Rightarrow u_{k+1}, \ldots, u_n \in U^\perp$. $\forall\, w \in U^\perp$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \langle w, u_i\rangle u_i = \sum_{i=k+1}^{n} \langle w, u_i\rangle u_i \in \operatorname{span}(u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

$\Rightarrow (u_{k+1}, \ldots, u_n)$ base ortonormale per $U^\perp \Rightarrow \dim U^\perp = n - k$. $\square$

Cor. *Dato $U \subset V$ sottospazio vettoriale, $\forall\, v \in V \Rightarrow \exists!\, v_U \in U$, $v_{U^\perp} \in U^\perp$ t.c. $v = v_U + v_{U^\perp}$.*

Dim. $(u_1, \ldots, u_n)$ base ortonormale per V ottenuta come nella dimostrazione precedente: $U = \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_k)$, $U^\perp = \operatorname{span}(u_{k+1}, \ldots, u_n)$

$$v_U = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i, \qquad v_{U^\perp} = \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i. \qquad \square$$

Def. v_U è detta *proiezione ortogonale* di v su U.
$v_{U^\perp}$ è detta *componente normale* di v rispetto a U.

Oss. $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base ortonormale per V, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli

$$U\colon\ \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$
$$\dim U = n - 1 \quad (\textit{iperpiano vettoriale})$$
$$v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \quad \text{base di } U^\perp$$

infatti l'equazione di U è il prodotto scalare tra il vettore di coordinate $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e il vettore di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$.

Più in generale i vettori riga della matrice di un sistema lineare omogeneo generano l'ortogonale dello spazio delle soluzioni (e ne sono base se in numero uguale al rango della matrice).

Matrici ortogonali

Def. Una matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ è *ortogonale* se ${}^tPP = I_n$

Oss. $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonale $\Leftrightarrow P^{-1} = {}^tP$

Oss. P ortogonale $\Rightarrow \det P = \pm 1$. Infatti $1 = \det({}^tPP) = (\det P)^2$.

Def. $\mathrm{O}(n) \overset{\text{def}}{=} \{P \in M_n(\mathbb{R}) \mid P \text{ ortogonale}\}$ *gruppo ortogonale*.

Def. $\mathrm{SO}(n) \overset{\text{def}}{=} \{P \in \mathrm{O}(n) \mid \det P = 1\}$ *gruppo ortogonale speciale*.

Oss. $I_n \in \mathrm{SO}(n)$ e $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Oss. $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono chiusi rispetto a prodotti e inverse:
$A, B \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{O}(n)$ e $A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.
$A, B \in \mathrm{SO}(n) \Rightarrow AB \in \mathrm{SO}(n)$ e $A^{-1} \in \mathrm{SO}(n)$.

Prop. *Le seguenti sono equivalenti*
1) le colonne di P formano una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$;

2) le righe di P formano una base ortonormale per $\mathbb{R}^n$;

3) $P \in \mathrm{O}(n)$.

Dim. Dimostriamolo per le colonne.
$({}^tPP)_{ij} = ({}^tP)^{(i)} P_{(j)} = {}^tP_{(i)} P_{(j)} = \langle P_{(i)}, P_{(j)} \rangle = \delta_{ij} \; \forall\, i, j \Leftrightarrow P \in \mathrm{O}(n)$. $\square$

Oss. $P \in \mathrm{O}(n)$ è la matrice del cambio di base dalla base canonica alla base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata dale colonne di P.

Teor. *Siano $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ e $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ basi per V con $\mathcal{B}$ ortonormale. Allora $\mathcal{C}$ è ortonormale $\Leftrightarrow M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{O}(n)$.*

Endomorfismi autoaggiunti

Def. $f \in \mathrm{End}(V)$ è *autoaggiunto* o *simmetrico* se $\forall\, v, w \in V$ si ha

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle.$$

Teor. *Sia $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ base ortonormale per V.*
Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ autoaggiunto $\Leftrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ simmetrica.

Dim. $A := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$. $\forall\, v = X^{\mathcal{B}}, w = Y^{\mathcal{B}} \in V$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle f(v), w \rangle = \langle AX, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t(AX)Y = {}^tX\, {}^tAY$$
$$\langle v, f(w) \rangle = \langle X, AY \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^tXAY$$

quindi $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \Leftrightarrow {}^tX\, {}^tAY = {}^tXAY \Leftrightarrow {}^tA = A$. $\square$

Cor. *Data $A \in M_n(\mathbb{R})$, $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico $\Leftrightarrow {}^tA = A$.*

Dim. $\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormale e $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_n}(L_A) = A$. $\square$

Esempio. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare canonico.
$L_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

autoaggiunto perché A simmetrica.

$L_B \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

non è autoaggiunto.

Prop. *$f \in \mathrm{End}(V)$ autoaggiunto, $\lambda \neq \mu$ autovalori $\Rightarrow$* $\mathrm{Aut}(\lambda) \perp \mathrm{Aut}(\mu)$.

Dim. $\forall\, v \in \mathrm{Aut}(\lambda)$ e $\forall\, w \in \mathrm{Aut}(\mu)$ facciamo vedere che $v \perp w$

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$
$$(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle v, w \rangle = 0.$$ $\square$

Oss. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$ ammette n autovalori contati con la loro molteplicità algebrica.

Lem. *Ogni matrice simmetrica reale ha tutti gli autovalori reali.*

Cor. *Se* $\dim V < \infty$, *ogni* $f \in \mathrm{End}(V)$ *autoaggiunto ammette autovalori.*

Teorema spettrale. *Se* $\dim V < \infty$, *ogni* $f \in \mathrm{End}(V)$ *autoaggiunto ammette una base ortonormale diagonalizzante.*

Dim. Per induzione su $n = \dim V$.

$\boxed{\text{Base dell'induzione: } n = 1}$ $v \in V - \{0_V\} \rightsquigarrow u = \dfrac{v}{\|v\|}$ base ortonormale diagonalizzante.

$\boxed{\text{Ipotesi induttiva}}$ Supponiamo vero l'enunciato in dimensione $n - 1 \geqslant 1$ e dimostriamolo in dimensione n.
$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $f \rightsquigarrow v \in V - \{0_V\}$ autovettore $\rightsquigarrow U := \mathrm{span}(v)^\perp$ complemento ortogonale di $\mathrm{span}(v) \Rightarrow \dim U = n - 1$.
$\forall\, u \in U \Rightarrow \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle = \lambda\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow f(u) \in U$.
Ipotesi induttiva $\rightsquigarrow (u_1, \ldots, u_{n-1})$ base ortonormale per U che diagonalizza la restrizione $f|_U \colon U \to U$. Posto $u_n = \dfrac{v}{\|v\|} \Rightarrow (u_1, \ldots, u_n)$ base ortonormale che diagonalizza $f : V \to V$. $\square$

In pratica si procede nel modo seguente: si sceglie una base ortonormale $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ per V. Si calcola la matrice simmetrica reale $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ e si procede con la diagonalizzazione, calcolando gli autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e una base ortonormale $\mathcal{C}_i$ per ciascun autospazio $\mathrm{Aut}(\lambda_i)$ (se $m_g(\lambda_i) > 1$ occorre applicare Gram-Schmidt e normalizzazione ad una base di $\mathrm{Aut}(\lambda_i)$ se questa non è ortonormale). $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_k$ è base ortonormale diagonalizzante perché gli autospazi sono tra loro ortogonali.

Cor. $\forall\, A \in M_n(\mathbb{R})$ *simmetrica* $\Rightarrow \exists\, P \in \mathrm{O}(n)$ *t.c.* $D = {}^tPAP$ *diagonale.*

Dim. $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autoaggiunto $\Rightarrow \exists\, \mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ base ortonormale diagonalizzante $\rightsquigarrow P = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_n}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = (c_1 \cdots c_n) \in \mathrm{O}(n) \Rightarrow P^{-1} = {}^tP$ e $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ diagonale. $\square$

Oss. A meno di cambiare segno a c_1 possiamo assumere $P \in \mathrm{SO}(n)$.