Sottospazi affini

V spazio vettoriale reale o complesso ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$).

Def. Dato $u \in V$, la *traslazione di vettore* u è l'applicazione

$$t_u : V \to V$$
$$t_u(v) = u + v.$$

Oss. $t_u(0_V) = u$.

Prop. *Valgono le seguenti proprietà:*
$t_{0_V} = \mathrm{id}_V$
$t_u \circ t_w = t_{u+w}$
$t_u^{-1} = t_{-u}$
le traslazioni sono biiettive.

Dato $A \subset V$ denotiamo il suo traslato mediante $u \in V$ con

$$u + A \overset{\text{def}}{=} t_u(A) = \{u + a \mid a \in A\} \subset V.$$

Def. Un sottoinsieme $L \subset V$ è detto *sottospazio affine di V* se $\exists\, L_0 \subset V$ sottospazio vettoriale e $\exists\, u \in V$ t.c. $L = u + L_0$. L_0 è detto *giacitura* di L. Poniamo $\dim L \overset{\text{def}}{=} \dim L_0$.

$\underline{\dim L = 0}$ *Punto.*
$\underline{\dim L = 1}$ *Retta affine.*
$\underline{\dim L = 2}$ *Piano affine.*

Oss. I sottospazi affini sono i traslati dei sottospazi vettoriali.
Vettoriale $\not\Leftarrow\!\Rightarrow$ affine. Un sottospazio affine $L \subset V$ è vettoriale $\Leftrightarrow 0_V \in L$.

In particolare V stesso è sottospazio affine e si chiama anche *spazio affine* e spesso viene indicato con $A(V)$.

Oss. I sottospazi affini non sono vuoti.

Prop. *Dati $L_0 \subset V$ sottospazio vettoriale e $u \in V \Rightarrow \exists!\, L \subset V$ sottospazio affine passante per u e con giacitura L_0.*

Dim. Basta porre $L = u + L_0 \Rightarrow u = u + 0_V \in L$. □

Teorema di struttura per sistemi lineari. *Sia $S : AX = B$ un sistema lineare compatibile, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$. Allora $\Sigma_S \subset \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine con giacitura lo spazio delle soluzioni Σ_{S_0} del sistema omogeneo associato $S_0 : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$. $\dim \Sigma_S = \dim \Sigma_{S_0} = n - \mathrm{rg}(A)$.*

Dim. $\Sigma_{S_0} = \ker L_A \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio vettoriale, $\dim \Sigma_{S_0} = n - \mathrm{rg}\, A$.
Scegliamo una soluzione $s \in \Sigma_S$ (esiste perché S compatibile) $\Rightarrow As = B$.
$v \in \Sigma_S \Leftrightarrow Av = B = As \Leftrightarrow 0_{\mathbb{K}^m} = Av - As = A(v - s) \Leftrightarrow v - s \in \Sigma_{S_0}$ $\Leftrightarrow v \in s + \Sigma_{S_0} \Rightarrow \Sigma_S = s + \Sigma_{S_0}$. □

Oss.
S incompatibile $\Leftrightarrow \Sigma_S = \emptyset$ non è sottospazio affine.
Σ_S sottospazio vettoriale $\Leftrightarrow S$ omogeneo.