Equazioni di sottospazi affini

$L \subset V$ sottospazio affine passante per $u \in V$ e con giacitura L_0

$$L = u + L_0.$$

Oss. $\forall v, w \in L \Rightarrow v - w \in L_0$. Infatti $v = u + v_0$, $w = u + w_0$ con $v_0, w_0 \in L_0 \Rightarrow v - w = u + v_0 - (u + w_0) = v_0 - w_0 \in L_0$.

Scegliamo una base $(w_1, \dots, w_k)$ per L_0.

Equazione vettoriale.

$$L : v = t_1 w_1 + \dots + t_k w_k + u$$

è detta *equazione vettoriale di* L. Al variare dei *parametri* $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ si ottengono tutti i punti di L. La giacitura L_0 ha equazione vettoriale

$$L_0 : v = t_1 w_1 + \dots + t_k w_k$$

Equazione parametrica. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V.
L'equazione vettoriale di L si scrive come

$$L : X = t_1 A_1 + \dots + t_k A_k + B$$

dove X è il vettore delle coordinate di v, C_j di w_j e D di u, rispetto a $\mathcal{B}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$L : \begin{cases} x_1 = c_{11} t_1 + \dots + c_{1k} t_k + d_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1} t_1 + \dots + c_{nk} t_k + d_n \end{cases}$$

sono dette *equazioni parametriche* di L. L_0 ha equazioni parametriche

$$L_0 : \begin{cases} x_1 = c_{11} t_1 + \dots + c_{1k} t_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1} t_1 + \dots + c_{nk} t_k \end{cases}$$

Equazione cartesiana. Eliminando i parametri $t_1, \dots, t_k$ dalle equazioni parametriche si ottengono le *equazioni cartesiane*

$$L : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = q_m \end{cases}$$

L è l'insieme dei punti le cui coordinate soddisfano questo sistema lineare.
L_0 ha equazioni cartesiane

$$L_0 : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

Pertanto otteniamo l'inverso del Teorema di struttura: ogni sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare compatibile.

Posizione reciproca di due sottospazi affini

Intersezione. $L, T \subset V$ sottospazi affini $\Rightarrow$

$$L \cap T = \{v \in V \mid v \in L \text{ e } v \in T\} \subset V$$

sottospazio affine oppure vuoto. Infatti mediante equazioni cartesiane

$$\begin{aligned} L &: AX = B \\ T &: CX = D \end{aligned} \qquad L \cap T : \begin{cases} AX = B \\ CX = D \end{cases}$$

Def. Due sottospazi affini L e $T \subset V$ con giaciture risp. L_0 e T_0 sono

1) *incidenti* se $L \cap T \neq \emptyset$;

2) *disgiunti* se $L \cap T = \emptyset$;

3) *paralleli* se $L_0 \subset T_0$ oppure $T_0 \subset L_0$, e scriviamo $L \parallel T$;

4) *sghembi* se $L \cap T = \emptyset$ e $L \nparallel T$ ($\Leftrightarrow$ L e T sono disgiunti e non paralleli).

Oss. Se $\dim L = \dim T$ allora $L \parallel T \Leftrightarrow L_0 = T_0$.

Teor ("Postulato delle parallele"). *Supponiamo* $\dim V < \infty$. *Sia* $L \subset V$ *un sottospazio affine e* $u \in V$ *un punto qualsiasi. Allora* $\exists! \, T \subset V$ *sottospazio affine t.c.* $u \in T$, $T \parallel L$ *e* $\dim T = \dim L$.

Dim. L_0 giacitura di $L \rightsquigarrow T = u + L_0$. $\square$

Per capire la posizione reciproca di due sottospazi affini si scrivono le equazioni cartesiane e si studia il sistema formato da tutte le equazioni messe insieme. Si applica Rouché-Capelli per capire la compatibilità e la dimensione dell'intersezione (se non vuota).
Indichiamo con A la matrice dei coefficienti del sistema formato da tutte le equazioni coinvolte e con $\tilde{A}$ la matrice completa.

Rette in $\mathbb{R}^2$

$$r: \; ax+by=c \qquad s: \; dx+ey=f$$

$r = s \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}\tilde{A} = 1$

$r \parallel s$ e $r \cap s = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 1$ e $\operatorname{rg}\tilde{A} = 2$

$r \cap s =$ punto $\;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 2$.

Rette e piani in $\mathbb{R}^3$

Due piani.

$$L: \; ax+by+cz=d \qquad T: \; ex+fy+gz=h$$

$L = T \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}\tilde{A} = 1$

$L \parallel T$ e $L \cap T = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 1$ e $\operatorname{rg}\tilde{A} = 2$

$L \cap T =$ retta $\;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 2$.

Retta e piano.

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad L: ex+fy+gz=h$$

$r \subset L \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}\tilde{A} = 2$

$r \parallel L$ e $r \cap L = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 2$ e $\operatorname{rg}\tilde{A} = 3$

$r \cap L =$ punto $\;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 3$.

Due rette.

$$r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} e_1x+f_1y+g_1z=h_1 \\ e_2x+f_2y+g_2z=h_2 \end{cases}$$

$r = s \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}\tilde{A} = 2$

$r \parallel s$ e $r \cap s = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = 2$ e $\operatorname{rg}\tilde{A} = 3$

$r \cap s =$ punto $\;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\tilde{A} = 3$

r e s sghembe $\;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}\tilde{A} = 4$.

Affinità

Def. $f: V \to V$ è detta *affinità* se $\exists\, \varphi: V \to V$ isomorfismo t.c.

$$f(v) - f(w) = \varphi(v-w), \;\; \forall\, v, w \in V.$$

φ si chiama *parte lineare* di f.

Oss. $f(v) = \varphi(v) + f(0_V)$, $\forall\, v \in V$, ottenuta ponendo $w = 0_V$.

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ affinità $\Leftrightarrow \exists\, G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $\exists\, u \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$f(X) = GX + u, \quad \forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Oss. $u = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow f$ isomorfismo. $G = I_n \Rightarrow f = t_u$ traslazione.

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ affinità $\Rightarrow f^{-1}$ affinità ottenuta risolvendo $Y = GX + u$

$$X = G^{-1}Y - G^{-1}u$$

$$f^{-1}(Y) = G^{-1}Y - G^{-1}u.$$

Geometria Euclidea

V spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$.

Def. Un vettore di norma 1 è detto *versore*.

Def. $u \in V$ è *normale* ad un sottospazio affine $L \subset V$ se $u \in L_0^\perp$ e $u \neq 0_V$, dove $L_0 \subset V$ è la giacitura di L. u è *parallelo* a L se $u \in L_0$.

Oss. u versore normale a L se $u \in L_0^\perp$ e $\|u\| = 1$.

Esempio. Dato il piano $L \subset \mathbb{R}^3$ di equazione

$$L:\ 2x - y - 3z = 1$$

un versore normale è

$$u = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ottenuto normalizzando il vettore dei coefficienti.

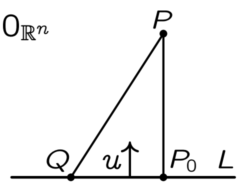
Distanza tra sottoinsiemi. La *distanza* tra A e $B \subset V$, $A, B \neq \emptyset$, è

$$d(A, B) \overset{\text{def}}{=} \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Oss. $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow d(A, B) = 0$. Vale viceversa se A, B sottospazi affini.

Distanza tra punto e iperpiano affine. In $\mathbb{R}^n$ consideriamo l'iperpiano

$$L:\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^n}$$



e il punto $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo calcolare $d(P, L)$.

Un versore normale a L è $u = \dfrac{A}{\|A\|}$.

Il punto $P_0 \in L$ di minima distanza da P si ottiene come intersezione tra L e la retta ortogonale a L passante per P. Sia $Q \in L \Rightarrow \langle Q, A\rangle + b = 0$.

$$\begin{aligned} d(P, L) = d(P, P_0) &= |\langle P - P_0, u\rangle| = |\langle P - Q + Q - P_0, u\rangle| = \\ &= |\langle P - Q, u\rangle| = \frac{|\langle P, A\rangle - \langle Q, A\rangle|}{\|A\|} = \\ &= \frac{|\langle P, A\rangle + b|}{\|A\|} = \frac{|a_1p_1 + \cdots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $Q - P_0 \in L_0 \Rightarrow \langle Q - P_0, u\rangle = 0$.

Esempio. Calcoliamo in $\mathbb{R}^2$ la distanza tra la retta r e il punto P con

$$r:\ 2x - y + 2 = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad d(P, r) = \frac{|2 - 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Angolo tra due rette in $\mathbb{R}^n$. $r, s \subset \mathbb{R}^n$ rette con *vettori direzionali* risp. v_r, v_s, ossia $r_0 = \text{span}(v_r)$, $s_0 = \text{span}(v_s)$. L'*angolo* tra r e s è

$$\widehat{rs} \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{|\langle v_r, v_s \rangle|}{\|v_r\| \|v_s\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Oss. Il valore assoluto nel numeratore è dovuto al fatto che i vettori direzionali non sono univocamente determinati: se v_r è un vettore direzionale di r, anche $-v_r$ lo è.

Def. r e s sono *perpendicolari* se $\widehat{rs} = \dfrac{\pi}{2}$.

Angolo tra due iperpiani in $\mathbb{R}^n$. $L, T \subset \mathbb{R}^n$ iperpiani con *vettori normali* risp. u_L, u_T, ossia $L_0^\perp = \text{span}(u_L)$, $T_0^\perp = \text{span}(u_T)$. L'*angolo* tra L e T è

$$\widehat{LT} \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{|\langle u_L, u_T \rangle|}{\|u_L\| \|u_T\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Def. L e T sono *perpendicolari* se $\widehat{LT} = \dfrac{\pi}{2}$.