Geometria

Foglio di esercizi 6

1) Sia (e_1, e_2) la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, i vettori $e_1 + \alpha e_2, e_2$ formano una base per $\mathbb{R}^2$.

2) Completare i vettori $\{(1,0,2,3),(1,1,0,-2)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

3) Nei seguenti casi, dire se i vettori sono linearmente dipendenti. In caso affermativo esibire una loro combinazione lineare nulla non banale, scriverne uno come combinazione lineare degli altri, trovare una base per il sottospazio vettoriale generato e infine completare tale base ad una base dello spazio ambiente:

   (a) $(1,4),\ (-3,1),\ (1,1) \in \mathbb{R}^2$;
   (b) $(1,1,1),\ (2,-1,0),\ (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$;
   (c) $(2,i),\ (3-i,1) \in \mathbb{C}^2$;
   (d) $(i,0,-1),\ (1,1,1),\ (1+2i, 1-2i, 0) \in \mathbb{C}^3$;
   (e) $(3,1),\ (1,1),\ (1,2) \in \mathbb{R}^2$;
   (f) $(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$.

4) Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 + 3e_2 - e_4 \\ u_2 &= 2e_1 + e_2 - e_3 \\ u_3 &= -2e_1 + 9e_2 + 3e_3 - 4e_4 \\ u_4 &= 5e_2 + e_3 - 2e_4, \end{aligned}$$

dove (e_1, e_2, e_3, e_4) denota la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di $U = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subset \mathbb{R}^4$. Verificare che $3e_1 - e_2 - 2e_3 + e_4 \in U$ e calcolarne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Completare la base $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$. Infine determinare equazioni cartesiane per U.

5) Risolvere il sistema lineare seguente trovando anche una base e la dimensione dello spazio delle soluzioni al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{cases}$$

6) Calcolare il rango della seguente matrice reale al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t-1 & 2 \\ t & -2 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 2t & 1 \end{pmatrix}.$$

Per i valori di t per cui il rango non è massimo determinare una base e la dimensione dello spazio delle colonne, di quello delle righe, e dello spazio delle soluzioni del sistema $AX = 0$.

7) Determinare il rango della matrice seguente al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Risolvere il sistema $A_\lambda X = 0$.