Geometria

Foglio di esercizi 8

1) Si considerino i vettori $v_1 = (2, 0, -1, 0), v_2 = (0, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Completarli ad una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\det(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_4}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})) = 1$. Determinare $M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{V}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$. Calcolare le coordinate di $u = (2, 1, 1, -1)$ rispetto a $\mathcal{V}$.

2) Diagonalizzare l'endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base dei corrispondenti autospazi della matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se è diagonalizzabile trovare una base di autovettori per lo spazio vettoriale corrispondente, una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile P tale che $A = PDP^{-1}$.

4) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base dei corrispondenti autospazi della matrice reale

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se è diagonalizzabile trovare una base di autovettori per lo spazio vettoriale corrispondente, una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile P tale che $A = PDP^{-1}$.

5) Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

6) Dire se la funzione seguente è una forma bilineare

$$a \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$a((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

7) Dire se la funzione seguente è una forma bilineare e in caso affermativo trovarne la matrice rispetto alla base canonica e dire se b è simmetrica

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 - x_2y_1.$$

8) Dire se g è una forma bilineare e in caso affermativo trovarne la matrice rispetto alla base canonica.

$$g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

È un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$?