Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 10 settembre 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) **(5 punti)** Sia A una matrice di tipo $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Supponiamo che esista $b_1 \in \mathbb{K}^n$ tale che il sistema lineare $A \cdot X = b_1$ abbia più di una soluzione. Dire se è vero che allora esiste $b_2 \in \mathbb{K}^n$ tale che $A \cdot X = b_2$ sia incompatibile, giustificando la risposta.

Per il Teorema di Rouché-Capelli, le soluzioni di $A \cdot X = b_1$ dipendono da $n - \mathrm{rg} A$ parametri liberi. Per ipotesi, non c'è un'unica soluzione, quindi $n - \mathrm{rg} A \geq 1$, cioè $\mathrm{rg} A \leq n-1$. Come conseguenza abbiamo che $L_A : K^n \to K^n$ non ha rango massimo, quindi non è suriettiva, cioè $\mathrm{Im}\, L_A \subsetneq K^n$. Se scegliamo quindi $b_2 \in K^n \setminus \mathrm{Im}\, L_A$, abbiamo che non esiste alcun $s \in K^n$ tale che $L_A(s) = b_2$; essendo $L_A(s) = A \cdot s$, si ha $\nexists\, s$ tale che $A \cdot s = b_2$, quindi $A \cdot X = b_2$ è incompatibile

(2) **(4 punti)** Sia C una matrice di tipo $p \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Se esiste $b \in \mathbb{K}^p$ tale che il sistema lineare $C \cdot X = b$ ha un'unica soluzione. È vero che il sistema è necessariamente di Cramer, cioè $p = n = \text{rango}(C)$? Giustificare la risposta.

$C \cdot x = b$ ha un'unica soluzione equivale a dire che $rg\, C = rg\,(C|b)$ e $n - rg\, C = 0$, per il Teorema di Rouché - Capelli.

Quindi $rg\, C = n$; essendo in generale $rg\, C \leq \min\{n, p\}$, si deve avere $n \leq p$ e C di rango massimo.

Quindi il sistema NON è necessariamente di Cramer.

In termini di applicazioni lineari:

cons. $L_C : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$; dire che $C \cdot x = b$ ha un'unica soluzione equivale a dire che $b \in \operatorname{Im} L_C$ e che L_C è iniettiva; infatti, sia $v \in \ker L_C$ e sia $s \in \mathbb{K}^n$ t.c. $L_C(s) = b$; se $v \neq 0$, $s + v \neq s$ è un'altra soluzione di $C \cdot x = b$: $C \cdot (s+v) = C \cdot s + C \cdot v = b + 0 = b$.

Infine: L_C iniettiva $\Rightarrow n \leq p$ per il Teorema di Dimensione.

(3) Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2w = 0 \right\}$. Si determini un base di W **(3 punti)** e un sottospazio supplementare $W' \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 1, quindi in somma diretta con W **(3 punti)**.

W è il SSV delle soluzioni del SLO $x - y + z - 2w = 0$. La matrice dei coefficienti è $A = (1 \ -1 \ 1 \ -2) \in M_{1,4}(\mathbb{R})$; $rg\, A = 1$, quindi $\dim W = 4 - 1 = 3$. Per trovare una base di W basta scrivere la generica soluzione: abbiamo 3 parametri liberi, ad es. $w = t$, $z = s$, $y = u$ allora $x = u - s + 2t$, e le soluzioni sono del tipo

$$\begin{pmatrix} u - s + 2t \\ u \\ s \\ t \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$ quindi $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Per trovare W', basta estendere $\mathcal{B}_W$ a base di $\mathbb{R}^4$, ad esempio con l'aggiunta di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; per quanto visto a lezione $W' = \operatorname{Span}(e_1)$.

(4) Si consideri la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2t-1 & t & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro t.

(a) **(5 punti)** Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di M_t sono tutti reali, specificando i casi in cui ci sono autovalori di molteplicità algebrica maggiore di 1.

(b) **(5 punti)** Si determini per quali valori di t la matrice M_t è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

a) $p_{M_t}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 2t-1 & t & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)\left((1-x)^2 - t\right) = (1-x)\left(x^2-2x+(1-t)\right)$

ha 3 radici reali (con eventuali molteplicità) $\Leftrightarrow \Delta = 4-4(1-t) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$

Se $t=0$, si ha $p_{M_0}(x) = (1-x)^3$, quindi $Sp(M_0) = \{1\}$ con $m_a(1) = 3$.

Se $t>0$, $p_{M_t}(x) = (1-x)\left(x-(1-\sqrt{t})\right)\left(x-(1+\sqrt{t})\right)$ e

e $Sp(M_t) = \{1, 1-\sqrt{t}, 1+\sqrt{t}\}$; ogni autovalore ha molteplicità algebrica 1.

b) Per $t>0$, la matrice è diagonalizzabile perché ha 3 autovalori distinti.

Per $t=0$, se M_0 fosse diagonalizzabile sarebbe simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$; ma l'unica matrice simile a $\mathbb{I}_3$ è $\mathbb{I}_3$ stessa, mentre $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbb{I}_3$, quindi M_0 non è diagonalizzabile.

Alternativamente, calcolare $m_g(1)$ e verificare che

$m_g(1) < m_a(1) = 3$.

(5) **(6 punti)** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Si dimostri che se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori relativi a k autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$), allora $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Si vedano gli appunti del corso.