Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2023-2024, terzo appello estivo

COGNOME _____ NOME _____

N. Matricola _____ Anno di corso _____

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

• si calcoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x) - 3x}{x^2}$ l'ospite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+3x} - 3}{2x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \left[\frac{1-1-3x}{1+3x} \right]}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{(1+3x)x} =$$

$$= -\frac{9}{2}$$

• si calcoli $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \frac{\log(1+x+e^x) - x}{x}$;

$$e^x \frac{\log(e^x (1 + e^{-x}x + e^{-x})) - x}{x} =$$

$$\frac{\log(1 + e^{-x}x + e^{-x})}{e^{-x} + e^{-x}} \cdot \frac{(e^{-x}x + e^{-x})}{x e^{-x}}$$

↑ 1 ↑ 2

Limite ha valore 1

• si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \int_{x^{-1}}^{\log(1+x+x^2)} \sin(t^2) dt$;

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2} (1+2x) \sin(\log^2(1+x+x^2)) + \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x - x^2}{1 + x}$$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremità del dominio; $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x} = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \mp\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - x^2}{x} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - x^2}{x} = +\infty$$

- si calcoli $f'(x)$, si trovino gli intervalli di crescita e decrescenza e gli eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{(1 - 2x)(1 + x) - (x - x^2)}{(1 + x)^2} = \frac{1 - x - 2x^2 - x + x^2}{(1 + x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1 + x)^2} = 0$$

per $x_{\pm} = -1 \pm \sqrt{2}$, $f'(x) > 0$ per $x \notin [x_-, x_+]$, $f'(x) < 0$

per $x \in (x_-, x_+)$, escludendo $x = -1$, e pertanto x_- è un max locale e x_+ è un min locale

- si calcoli $f''(x)$ e si trovi dove è concava e dove è convessa;

$$f''(x) = \frac{(-2x - 2)(x + 1)^2 - (-x^2 - 2x + 1)2(x + 1)}{(1 + x)^4} = 2 \frac{(x + 1)^2 - (x^2 + 2x - 1)}{(x + 1)^3} =$$

$$= -2 \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 1}{(x + 1)^3} = -\frac{4}{(x + 1)^3}$$

- si tracci il grafico.

COGNOME e NOME _____

N. Matricola _____

ESERCIZIO N. 3.

• si calcoli $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$ $\frac{1}{x^2(x+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, $A = \frac{1}{x+1} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}$

$A+B=0$ (regole da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = 0 = A+B$) $\Rightarrow B = -\frac{1}{2}$. Infine

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2+1) - \frac{1}{2}x(x+1) + C(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} \Rightarrow \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{R+1}{\sqrt{R^2+1}}$$

• si calcolino le primitive $\int x^2 \sin^2(x) dx$; $-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) =$

$$\int x^2 \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} \int x^2 (\sin 2x)' = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin(2x) - \frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{1}{4} \int \cos(2x)$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{1}{4} x^2 \sin(2x) - \frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{1}{8} \sin(2x) + C$$

• si stabilisca se $\tanh(x) \frac{\sin x}{x^3}$ e' integrabile in $(0, +\infty)$; $Ponens (0, +\infty) = (0, 1] \cup [1, +\infty)$.

In $[1, +\infty)$ $\left| \tanh(x) \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3} \in L[1, +\infty) \Rightarrow f \in L[1, +\infty)$

In $(0, 1]$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x) \sin x}{x^3} = 1 \Rightarrow$ siccome $\frac{1}{x} \notin L(0, 1]$

• si stabilisca se $\arctan(x) \frac{\sin x}{1+x}$ e' integrabile in $[0, +\infty)$.

Basta considerare in $[1, +\infty)$ $f \notin L(0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\sin x}{x} - \frac{\pi}{2} \sin x \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right) + \frac{\sin x}{1+x} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right)$$

integrabile in $[1, +\infty)$ ops integrabile $\Rightarrow$ non integrabile

Fun fatte $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{(1+x)x} \leq \frac{1}{x^2} \in L[1, +\infty)$

$$\left| \frac{\sin x}{1+x} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1+x} \text{ dove } \frac{\pi}{2} - \arctan x = \frac{1}{x} (1+o(x))$$

Infine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow$

ESERCIZIO N. 4. Verificare che la funzione $f(x) = 1 + 3x + x^3$ biettiva da $\mathbb{R}$ in se stesso e calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 1 della versione inversa g (ricordare che la funzione inversa soddisfa $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{Per il teor. dei valori intermedi } f \text{ è suriettiva}$$

$$f'(x) = 3 + 3x^2 \geq 3 \Rightarrow f \text{ strett. crescente} \Rightarrow f \text{ biettiva}$$

Esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0$

Il polinomio di Taylor cercato è

$$p(x) = g(0) + g'(0)x \quad \text{dove} \quad g(0) = x_0 \quad \text{e} \quad e$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{3 + 3x_0^2}$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y = e^x$ con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Equazione caratteristica $r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}i$

$$\Rightarrow y_h = A \sin(\sqrt{2}x) + B \cos(\sqrt{2}x)$$

$y_p = C e^x$ con $L[y_p] = C P(1) e^x = 3C e^x = e^x$

$$C = \frac{1}{3} \Rightarrow y_{gen} = A \sin(\sqrt{2}x) + B \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{3} e^x$$

Infine si cerca $y = A \sin(\sqrt{2}x) + B \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{3} e^x$

$$B + \frac{1}{3} = 1 \quad B = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{2}A + \frac{1}{3} = 0 \quad A = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$$