Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2023-2024, terzo appello estivo

COGNOME _____ **NOME** _____

N. Matricola _____ **Anno di corso** _____

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- si calcoli $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)-3x}{x^2}$ $\overset{\text{rapitol}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}-3}{2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\left[\frac{1-1-3x}{1+3x}\right]}{2x} = \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{(1+3x)x} =$$

$$= -\frac{9}{2}$$

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty} e^x \frac{\log(1+x+e^x)-x}{x}$;

$$e^x \frac{\lg\left(e^x(1+e^{-x}x+e^{-x})\right)-x}{x} = \frac{\lg(1+e^{-x}x+e^{-x})}{e^{-x}x+e^{-x}} \cdot \frac{(e^{-x}x+e^{-x})}{x\,e^{-x}}$$

$\nearrow 1$ $\nearrow 1$

Limite ha valore 1

- si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \int_{x^{-1}}^{\log(1+x+x^2)} \sin\left(t^2\right) dt$;

$$f'(x) = \frac{1}{1+x+x^2}(1+2x)\sin\left(\lg^2(1+x+x^2)\right) + \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x - x^2}{1 + x}$$

• si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x^2}{1 + x} = -\lim_{x \to \pm\infty} x = \mp\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x - x^2}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{x - x^2}{x} = +\infty$$

• si calcoli $f'(x)$, si trovino gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(1+x) - (x - x^2)}{(1+x)^2} = \frac{1 - x - 2x^2 - x + x^2}{(1+x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(1+x)^2} \geq 0$$

per $x_\pm = -1 \pm \sqrt{2}$, $f'(x) > 0$ per $x \notin [x_-, x_+]$, $f'(x) < 0$

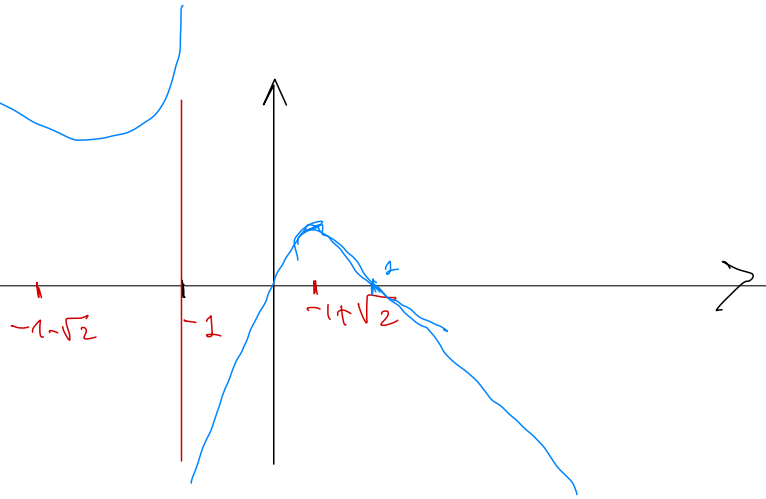
per $x \in (x_-, x_+)$, escludendo $x = -1$, e pertanto x_- è un max locale, x_+ min locale

• si calcoli $f''(x)$ e si trovi dove e' concava e dove e' convessa;

$$f''(x) = \frac{(-2x-2)(x+1)^2 - (-x^2 - 2x + 1)\,2(x+1)}{(1+x)^4} = -2\,\frac{(x+1)^2 - (x^2 + 2x - 1)}{(x+1)^3} =$$

$$= -2\,\frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 1}{(x+1)^3} = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

• si tracci il grafico .



COGNOME e NOME _____ **N. Matricola** _____

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+x^2+x+1}dx$

- si calcolino le primitive $\displaystyle\int x^2\sin^2(x)dx$;

- si stabilisca se $\tanh(x)\dfrac{\sin x}{x^3}$ e' integrabile in $(0,+\infty)$;

- si stabilisca se $\arctan(x)\dfrac{\sin x}{1+x}$ e' integrabile in $[0,+\infty)$.

ESERCIZIO N. 4. Verificare che la funzione $f(x) = 1 + 3x + x^3$ biettiva da $\mathbb{R}$ in se stesso e calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 1 della versione inversa g (ricordare che la funzione inversa soddisfa $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ per il teor. dei valori intermedi f è surjective

$f'(x) = 3 + 3x^2 \geq 3 \Rightarrow$ f strett. crescente $\Rightarrow$ f biiettiva.

Esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0$

Il polinomio di Taylor cercato è

$p(x) = g(0) + g'(0)x$ dove $g(0) = x_0$ e e

$g'(0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{3 + 3x_0^2}$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y = e^x$ con dati iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Eq. caratteristica $r^2 + 2 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}\, i$ (r^2: $p(r)$)

$\Rightarrow y_h = A \sin(\sqrt{2}x) + B \cos(\sqrt{2}x)$

$y_p = C e^x$ con $L[y_p] = C\, p(1) e^x = 3C e^x = e^x$

$C = \frac{1}{3} \Rightarrow y_{gen} = A \sin(\sqrt{2}x) + B \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{3} e^x$

Infine si cerca $y = A \sin(\sqrt{2}x) + B \cos(\sqrt{2}x) + \frac{1}{3} e^x$

$B + \frac{1}{3} = 1 \qquad B = \frac{2}{3}$

$\sqrt{2}A + \frac{1}{3} = 0 \qquad A = -\frac{1}{3\sqrt{2}}$