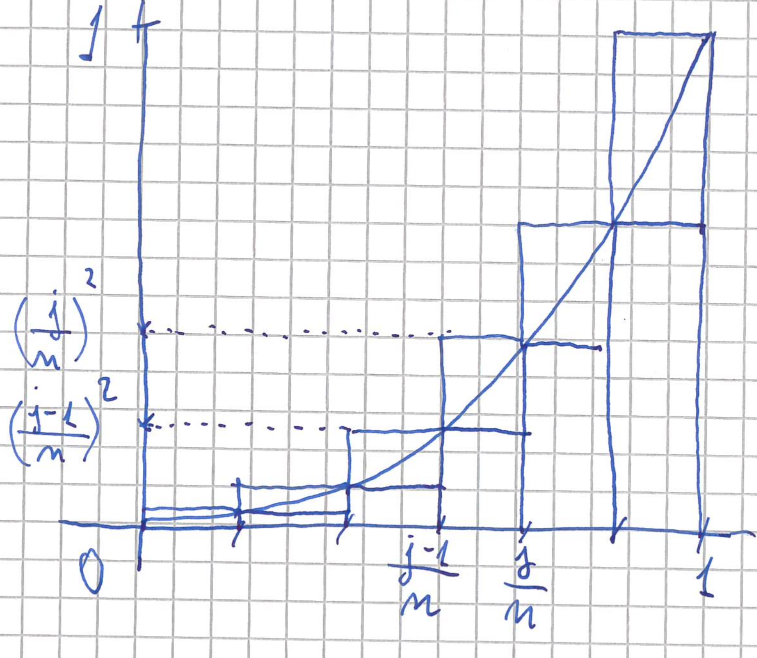
INTEGRALE DI RIEMANN

Esempio introduttivo. L'area del segmento di parabola.

problema: "calcolare" l'area della regione tratteggiata.

L'idea è di approssimare la regione per difetto e per eccesso con unioni di rettangoli:



Ragionevolmente si deve avere

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\leq A\leq\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

Ricordiamo la formula $\sum_{j=1}^{n} j^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Allora si ha

$$\frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \leq A \leq \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

per $n \to \infty$, otteniamo

$$\frac{1}{3} \leq A \leq \frac{1}{3} \quad \text{da cui} \quad A = \frac{1}{3}.$$

o

L'idea è di trovare una procedura generale ispirata a questo esempio, che ci permette di dare una definizione di area e un metodo per definirne e calcolarne la misura attraverso un processo di approssimazione.

Bisogna introdurre vari concetti e notazioni.

<u>Definizione</u> (partizione di un intervallo)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Si dice "<u>partizione</u>" di $[a,b]$ ogni sottoinsieme $P = \{x_0, x_1, \dots x_n\} \subseteq [a,b]$ tale che

(i) P sia finito

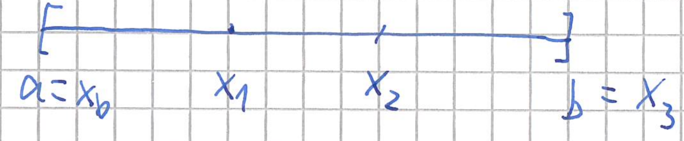
(ii) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

(cioè gli elementi di P sono etichettati in modo da essere ordinati, e inoltre $x_0 = a$ e $x_n = b$).

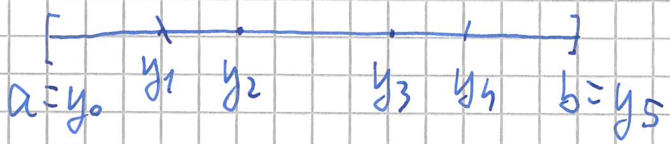
Definizione

Date due partizioni P e Q di $[a,b]$, si dice che Q è più fine di P (Q è un raffinamento di P) se e solo se $P \subseteq Q$)

(cioè Q si ottiene aggiungendo punti a P).



$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$



$Q = \{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$

$a = x_0 = y_0$, $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_5 = b$

$P \subseteq Q$.

Osservazione

La relazione "è più fine" nell'insieme delle partizioni è una relazione d'ordine <u>non Totale</u> . (non tutte le coppie di partizioni sono confrontabili).

Osservazione

Date due partizioni P_1 e P_2 di $[a,b]$, si ha che $P := P_1 \cup P_2$ è un raffinamento di entrambe.

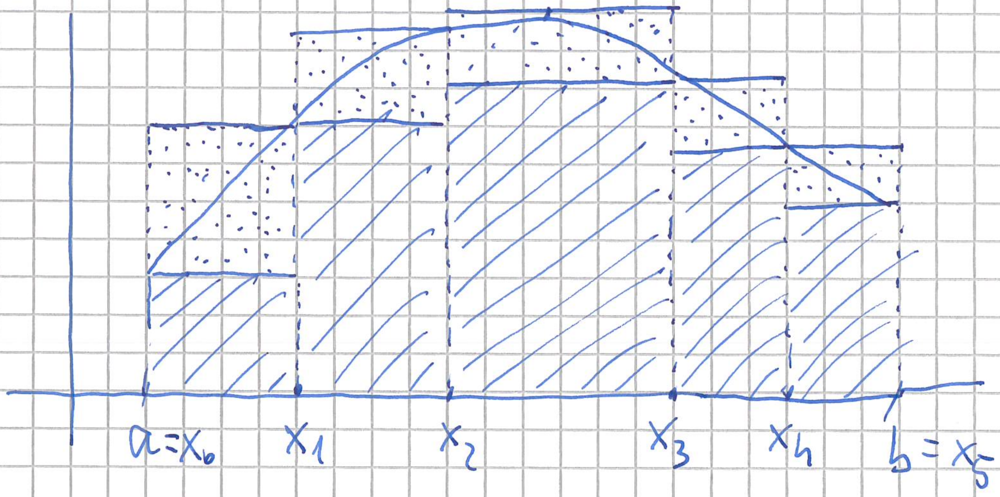
Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata.

Sia $P := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$.

Siano
$$m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad i = 1, \dots, n$$
$$M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad i = 1, \dots, n$$

Definiamo la somma di Riemann inferiore per f relativamente alla partizione P
$$L(f, P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \, (x_i - x_{i-1})$$

e la somma di Riemann superiore per f relativamente alla partizione P
$$U(f, P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \, (x_i - x_{i-1}).$$



Proposizione

a) $L(f,P) \leq U(f,P)$ per ogni partizione P

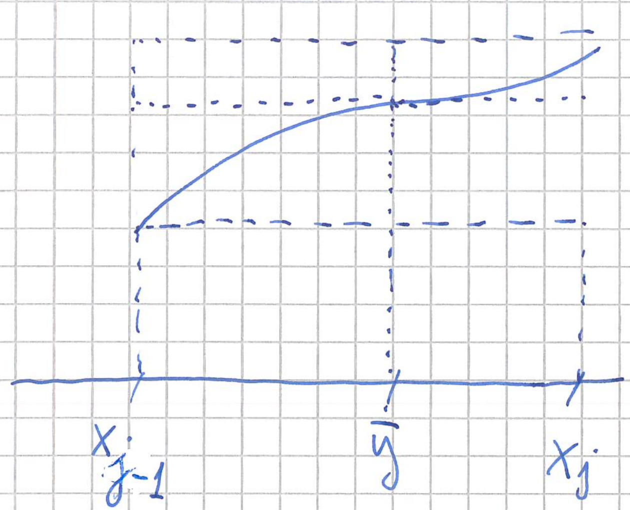
b) Se Q è più fine di P, allora
$$L(f,P) \leq L(f,Q) \quad e \quad U(f,Q) \leq U(f,P)$$

c) se P_1 e P_2 sono partizioni, allora $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$.

Dim.

a) è ovvio, perché $\forall i$ si ha che
$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

b) Dipende dal fatto che se aggiungo punti a $P=\{x_0,\dots,x_n\}$, si ha



$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f(x)\cdot(x_j - x_{j-1}) \leq \inf_{[x_{j-1},\bar{y}]} f(x)\cdot(\bar{y} - x_{j-1}) + \inf_{[\bar{y},x_j]} f(x)\cdot(x_j - \bar{y})$$

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} f(x)\cdot(x_j - x_{j-1}) \geq \sup_{[x_{j-1},\bar{y}]} f(x)\cdot(\bar{y} - x_{j-1}) + \sup_{[\bar{y},x_j]} f(x)\cdot(x_j - \bar{y})$$

c) Sia $P := P_1 \cup P_2$. Allora

$$L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2).$$

$\boxtimes$

<u>Osservazione</u>

L'insieme $\{L(f,P) \mid P \text{ partiz. di } [a,b]\}$

é superiormente limitato (qualsiasi $U(f,Q)$ ne è un maggiorante)

Analogamente l'insieme
$\{ U(f,P) \mid P$ partizione di $[a,b] \}$ è
inferiormente limitato (qualsiasi
$L(f,Q)$ ne è un minorante).

Possiamo quindi introdurre i numeri

$$\underline{I}(f;[a,b]) := \sup \{ L(f,P) \mid P \text{ partizione di } [a,b] \}$$

integrale di Riemann inferiore di f
su $[a,b]$

$$\overline{I}(f;[a,b]) := \inf \{ U(f,P) \mid P \text{ partizione di } [a,b] \}$$

integrale di Riemann superiore di f
su $[a,b]$.

Si ha $\underline{I}(f;[a,b]) \leq \overline{I}(f;[a,b])$

Definizione (di funzione integrabile)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione
limitata. f si dice <u>integrabile</u> su
$[a,b]$ se e solo se

$$\underline{I}(f;[a,b]) = \overline{I}(f;[a,b]).$$

In tal caso il numero

$$I(f;[a,b]) = \underline{I}(f;[a,b]) = \overline{I}(f;[a,b])$$

si dice "<u>integrale di f su $[a,b]$</u>".

Per motivi storici, si scrive

$$\underline{I}(f;[a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Osservazione</u>

Esistono funzioni non integrabili. Esempio

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si ha $\quad \underline{I}(f;[0,1]) = 0 \neq 1 = \overline{I}(f;[0,1])$

<u>Osservazione</u>

Se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è costante, allora f è integrabile e

$$\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$$

dove $\quad f(x) \equiv c$

Per determinare delle classi di funzioni integrabili ci serve il criterio di integrabilità seguente:

Criterio di integrabilità

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Allora f è integrabile se e solo se
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; P$ partizione di $[a,b]$ t.c.
$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Dim.

Supponiamo che f sia integrabile, e sia $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Dalla def. di integrale e di estremo superiore e inferiore, si ha che:

$\exists \; P_1$ partizione di $[a,b]$ t.c.

$I \geq L(f,P_1) \geq I - \varepsilon$

$\exists \; P_2$ partizione di $[a,b]$ t.c.

$I + \varepsilon \geq U(f,P_2) \geq I$.

Segue che $U(f,P) - L(f,P) \leq 2\varepsilon$, dove $P := P_1 \cup P_2$.

Viceversa, supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \; P$ partizione di $[a,b]$ t.c.
$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Allora $\forall \varepsilon > 0$

$\overline{I} - \underline{I} \leq \varepsilon$ e quindi $\overline{I} = \underline{I}$,

cioè f è integrabile. $\blacksquare$

Ora abbiamo:

TEOREMA

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile.

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Dobbiamo trovare una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$ t.c. $U(f,P) - L(f,P) \leq \varepsilon$.

Poiché f è continua su $[a,b]$, allora è uniformemente continua e quindi $\exists \delta > 0$ t.c. se $|t-s| \leq \delta$, allora $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$.

Prendiamo una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ in modo che $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ $\forall i$ (ad esempio possiamo dividere $[a,b]$ in n parti uguali con n abbastanza grande).

Poiché f è continua, applicando il teorema di Weierstrass, si ha che

$\forall i$ $\exists$ $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ t.c.

$$f(s_i) = m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$f(t_i) = M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Allora si ha:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(t_i) - f(s_i))}_{\substack{\leq \varepsilon \text{ perché} \\ |s_i - t_i| < \delta}} (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon (b-a).$$

$\blacksquare$

TEOREMA

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotona. Allora f è integrabile.

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a,b]$ t.c. $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Supponiamo che f sia non decrescente. Osserviamo subito che allora
$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ $\forall\, x \in [a,b]$, cosicché f è automaticamente limitata.

Sceglieremo la nostra P dividendo $[a,b]$ in n parti uguali, con n da determinare.

$$x_0 = a \,, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n} \,, \ldots \quad x_j = a + j\,\frac{b-a}{n} \,,$$

$$\ldots\ldots \quad x_n = b \,.$$

Con questa scelta si ha

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \frac{b-a}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(\underset{\substack{\| \\ M_i}}{f(x_i)} - \underset{\substack{\| \\ m_i}}{f(x_{i-1})}\big) \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) =$$

$$= \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{n} \leq \varepsilon$$

$$\text{se} \quad n \geq \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{\varepsilon}$$

∎