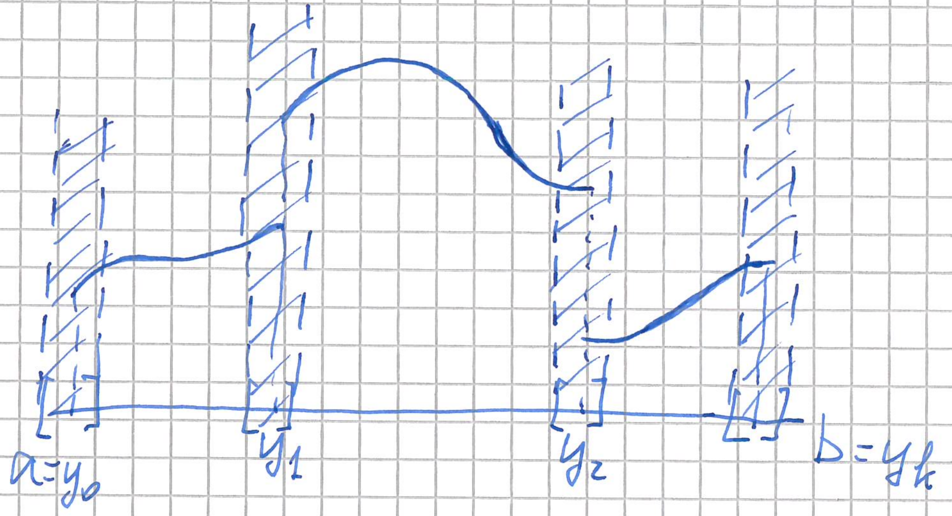
OSSERVAZIONE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, con un numero finito di punti di discontinuità $y_0, y_1, \ldots, y_m$. Allora f è integrabile.

Dim. (idea)

Si "inscatolano" i punti di discontinuità con intervalli molto piccoli, e poi si ripete il ragionamento sull'integrabilità delle funzioni continue.



PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

Siano f, g integrabili su $[a,b]$.
Allora
1) $f+g$ è integrabile e $\int_a^b (f+g)\,dx =$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$ (linearità)

2) Se f è integrabile, allora $-f$ è integrabile, e
$$\int_a^b (-f)\,dx = -\int_a^b f\,dx$$

3) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, αf è integrabile e
$$\int_a^b (\alpha f)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$$

4) Se $c \in]a,b[$, allora f è integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$ e
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ (vale il viceversa)

(additività)

5) Se $f \geq 0$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

quindi se $f \leq g$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(monotonia).

Dim.

1) Sia $\varepsilon > 0$. Dall'integrabilità di f e g si ha che $\exists\ P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partizione di $[a,b]$ t.c.

$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ $\quad$ $U(g,P) - L(g,P) < \varepsilon$.

Allora si ha

$$U(f+g, P) - L(f+g, P) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f+g) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (f+g) \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f + \sup_{[x_{i-1}, x_i]} g \right) - \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f + \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g \right) (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq U(f, P) - L(f, P) + U(g, P) - L(g, P)$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Quindi $f+g$ è integrabile.

Inoltre, dato $\varepsilon > 0$ e scegliendo ε come sopra, si ha:

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \, dx \leq U(f, P)$$

$$L(g, P) \leq \int_a^b g \, dx \leq U(g, P)$$

$$\begin{array}{ccccc} L(g+f, P) & \leq & \displaystyle\int_a^b (f+g) \, dx & \leq & U((f+g), P) \\ \text{\rotatebox{90}{$\leq$}} \; \geq & & & & \leq \\ L(f, P) + L(g, P) & & & & U(f, P) + U(g, P) \end{array}$$

e quindi

$$\left|\int_a^b (f+g)\,dx - \left(\int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx\right)\right| \leq$$

$$\leq \big(U(f,P) + U(g,P)\big) - \big(L(f,P) + L(g,P)\big)$$

$$\leq 2\varepsilon .$$

Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi.

2) Osserviamo che dato un insieme limitato A, posto $-A := \{-x \mid x \in A\}$, si ha

$$\inf(-A) = -\sup A \quad , \quad \sup(-A) = -\inf A .$$

Da ciò segue che, $\forall$ partizione P,

$$U(-f, P) = -L(f, P)$$

$$L(-f, P) = -U(f, P)$$

Segue che

$$\overline{I}(-f, P) = -\underline{I}(f, P)$$

$$\underline{I}(-f, P) = -\overline{I}(f, P)$$

Da cui la tesi.

3) Se $\alpha > 0$, osserviamo che

$$U(\alpha f, P) = \alpha\, U(f, P)$$

$$L(\alpha f, P) = \alpha\, L(f, P)$$

da cui $\underline{I}(\alpha f, P) = \alpha\, \underline{I}(f, P)$

$$\overline{I}(\alpha f, P) = \alpha\, \overline{I}(f, P)$$

e quindi αf è integrabile e

$$\int_a^b (\alpha f)\, dx = \alpha \int_a^b f\, dx .$$

Se $\alpha < 0$ si utilizza il punto 2) e poi si ragiona come per $\alpha > 0$.

4) Sia f integrabile in $[a, b]$ e sia $c \in]a, b[$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per l'integrabilità di f in $[a, b]$ esiste una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ t.c.

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon .$$

Non è restrittivo supporre che $c \in P$, in particolare $c = x_k$ per qualche $0 < k < n$.

Si ha allora che $P_1 = \{x_0, \dots, x_k\}$ è una partizione di $[a, c]$ e $P_2 = \{x_k, \dots, x_n\}$ è una partizione di $[c, b]$.

Si ha

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ f è integrabile in $[a, c]$.

Analogamente si ha che f è integrabile in $[c, b]$.

Ora, dato $\varepsilon > 0$ e presa P come sopra, si ha:

$$L(f, P_1) \leq \int_a^c f(x)\,dx \leq U(f, P_1)$$

$$L(f, P_2) \leq \int_c^b f(x)\,dx \leq U(f, P_2)$$

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f, P)$$

$\Rightarrow$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \right) \right| \leq$$

$$\leq U(f, P) - L(f, P) \leq \varepsilon$$

data l'arbitrarietà di ε, segue la tesi.

Viceversa, supponiamo che f sia integrabile su $[a, c]$ e su $[c, b]$. Vogliamo dimostrare che allora f è integrabile su $[a, b]$.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists$ P_1 partizione di $[a, c]$, $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ t.c.

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon/2$$

ed esiste $P_2 = \{x_k, \dots, x_n\}$ partizione di $[c, b]$ t.c.

$$U(f, P_2) - L(f, P_2) < \varepsilon/2 .$$

Definendo
$$P := \{x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\} = P_1 \cup P_2$$

ottengo una partizione di $[a, b]$ e si ha
$$U(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2)$$
$$L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2)$$

da cui si ottiene
$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

e da qui la tesi.

5) Segue dal fatto che $\forall$ P partizione si ha $U(f,P) \geq 0$. $\boxed{}$

TEOREMA

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, con $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$. Sia $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $h(x) := \varphi(f(x))$. Allora h è integrabile su $[a,b]$.

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché φ è continua su $[m, M]$, $\exists$ $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, t.c. se $|s-t| \leq \delta$, allora $|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$.

Poiché f è integrabile su $[a,b]$, esiste una partizione $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di $[a,b]$ t.c. $U(f,P) - L(f,P) \leq \delta^2$.

Siano, $\forall i = 1, \ldots, n$,

$$m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

$$m_i^* := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} h \qquad M_i^* := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} h$$

Scriviamo $\{1, 2, \ldots, n\} = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$, dove

$A = \{ i \mid M_i - m_i < \delta \}$ $B := \{ i \mid M_i - m_i \geq \delta \}$.

Se $i \in A$, allora $M_i^* - m_i^* < \varepsilon$

Se $i \in B$, allora $M_i^* - m_i^* \leq 2K$,

dove $K := \max\limits_{[m, M]} |\varphi(t)|$.

Allora si ha:

$$\delta \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \delta^2$$

e quindi $\sum\limits_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) < \delta < \varepsilon$

e quindi

$$U(P, h) - L(P, h) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \varepsilon(b-a) + 2K\varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε, h è integrabile ▨

COROLLARIO

Se f è integrabile, allora $|f|$ lo è.
Se f, g sono integrabili, allora fg lo è.

Dim.

Prendendo $\varphi(t) = |t|$, si ha che $\varphi \circ f$ è integr. poiché φ è continua.

Prendendo $\varphi(t) = t^2$ si ha che $f^2, g^2, (f+g)^2, (f-g)^2$ sono integrabili

Osserviamo che $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$

segue che fg è integrabile. ▨

PROPOSIZIONE

Se f è integrabile, allora

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx.$$

Dim

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

e quindi

$$-\int_a^b |f|\,dx \leq \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b |f|\,dx$$

e quindi

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx.$$

▨

PROPOSIZIONE

Se f è integrabile e $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x$, allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Dim.: Ovvio $\boxed{}$

La grandezza $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ si chiama "media integrale" di f su $[a,b]$.

TEOREMA DELLA MEDIA

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora $\exists$ $c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

Dim.

Per la proposizione precedente, si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

dove $m = \min_{[a,b]} f$ $\quad M = \max_{[a,b]} f$

Per il teorema degli zeri, $\exists$ $c \in [a,b]$

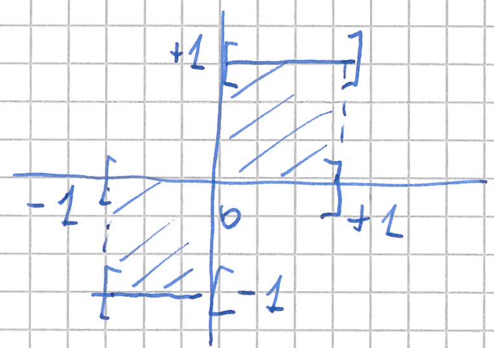
t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

(poiché f è continua) $\boxtimes$

Osservazione

Se f non è continua, il teorema non vale. Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ +1 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$



$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 0$$

ma $f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [-1, +1]$.

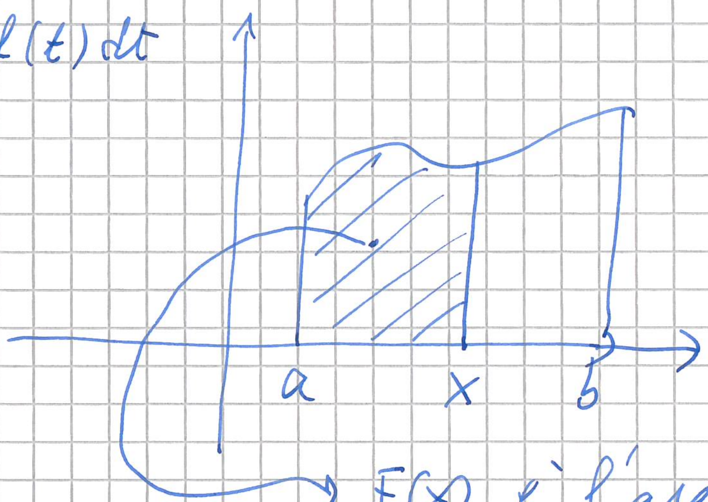
TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile.

Possiamo definire la seguente funzione, detta funzione integrale di f.

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$



$F(x)$ è l'area di questa parte di sottografico.

PROPOSIZIONE

$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Dim.

Sia $M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Si ha: per $x_1 > x_2$

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_a^{x_2} f(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt \right| \leq \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\,dt \leq M\,|x_1 - x_2|$$

$\Rightarrow$ F è continua (lipschitziana). $\boxtimes$

1° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, sia $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ la sua funzione integrale, e supponiamo che f sia continua in x_0.

Allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x_0, $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $|t - x_0| < \delta$, allora $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Supponiamo ora che $h > 0$. Stimiamo

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt = \frac{1}{|h|}\,\varepsilon h = \varepsilon.$$

Se $h<0$ si ragiona in modo simile.

Segue che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$ ▨

COROLLARIO

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua su $[a,b]$, allora F è derivabile su $[a,b]$ e $F'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$. ▨

Def. (PRIMITIVA)

Sia $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f:I\to\mathbb{R}$.

Una funzione $\varphi: I\to\mathbb{R}$ si dice primitiva di f $\Longleftrightarrow$ $\varphi'(x)=f(x)$ $\forall x\in I$.

Indichiamo con $P(f)$ l'insieme delle primitive di f.

$$P(f)=\{\psi: I\to\mathbb{R} \mid \psi'=f\}.$$

Il primo teorema fondamentale del calcolo garantisce che se f è continua su I, allora $P(f)\neq\phi$. Vedremo tra poco che $P(f)$ in generale potrebbe essere anche vuoto.

PROPOSIZIONE

Se $P(f) \neq \emptyset$, allora $\forall\, \varphi \in P(f)$, si ha

$$P(f) = \{ \varphi + c \mid c \in \mathbb{R} \}$$

cioè si ha che:

1) Se $P(f) \neq \emptyset$, allora è infinito
2) Per determinare $P(f)$ basta trovare un suo elemento, e tutti gli altri si ottengono da quello, sommando una costante arbitraria.

Dim.

1) Se $\varphi \in P(f)$ e $c \in \mathbb{R}$, allora

$\psi := \varphi + c$ soddisfa

$\psi' = (\varphi + c)' = \varphi' = f$

Quindi anche ψ è una primitiva.

2) Se φ e ψ sono primitive, allora si ha che

$(\psi - \varphi)' = \psi' - \varphi' = f - f = 0$

e quindi $\psi - \varphi$ è costante, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $\psi - \varphi = c$, ovvero $\psi = \varphi + c$. $\blacksquare$