2° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile. Supponiamo che f ammetta primitiva, cioè che $\exists$ $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c. $\varphi' = f$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Dim.

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Poiché f è integrabile, $\exists$ $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partizione di $[a,b]$ t.c. $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Scriviamo ora

$$\begin{aligned}
\varphi(b) - \varphi(a) &= \varphi(x_n) - \varphi(x_0) = \\
&= \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) + \varphi(x_{n-1}) + \dots + \varphi(x_1) - \varphi(x_0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \\
\text{(Lagrange)} \to &= \sum_{i=1}^{n} \varphi'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

Ora osserviamo che, $\forall i$,

$$m_i \leq f(c_i) \leq M_i$$

Quindi

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \varphi(b) - \varphi(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = U(f,P)$$

Quindi

$$L(f,P) \leq \varphi(b) - \varphi(a) \leq U(f,P).$$

Inoltre

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,P)$$

e quindi

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - (\varphi(b) - \varphi(a)) \right| \leq U(f,P) - L(f,P)$$

$$\leq \varepsilon .$$

Data l'arbitrarietà di ε, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \qquad \blacksquare$$

Ricapitolando:

1° teor. fondamentale del calcolo

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \\ f \text{ cont. in } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow F'(x_0)=f(x_0)$$

2° teor. fondamentale del calcolo

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ integr.} \\ \exists\, \varphi \text{ con } \varphi'=f \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b)-\varphi(a).$$

Legame tra integrale (calcolo di aree) e primitive (inverso della derivazione)

Per questo legame, storicamente l'insieme delle primitive si indica con un simbolo uguale a quello dell'integrale.

$$P(f) = \int f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \{\varphi \mid \varphi' = f\}$$

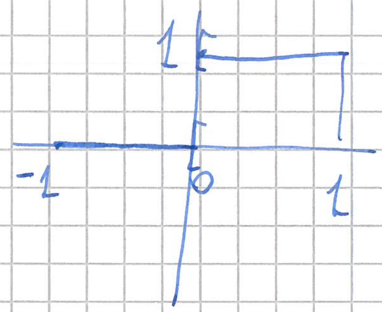
ES. $\int x\,dx = \left\{ \frac{1}{2}x^2 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\}$

OSSERVAZIONE

L'insieme delle primitive può essere vuoto.

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

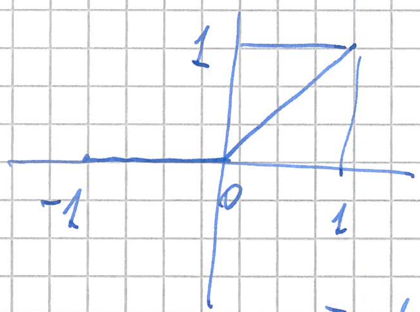


Se c'è primitiva, allora

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 & x < 0 \\ x + c_2 & x \geq 0 \end{cases}$$

φ deve essere continua, quindi deve essere $c_1 = c_2$, ad esempio $c_1 = c_2 = 0$.

quindi φ deve essere fatta così



che però non è derivabile in 0.

RICERCA DI PRIMITIVE (integrale indefinito)

INTEGRAZIONE DIRETTA

Si tratta di riconoscere "a occhio" che una funzione è la derivata di una funzione elementare. E' di aiuto la seguente tabella delle primitive:

•) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

se $\alpha \in \mathbb{R}$ vale per $x > 0$

se $\alpha \in \mathbb{N}$ vale per $x \in \mathbb{R}$

se $-\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq -1$, vale per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

•) $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

•) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

•) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

•) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$

•) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

•) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

•) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Si parte dalla formula di derivazione del prodotto

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\Rightarrow \int (f \cdot g)' = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'$$

$$\Rightarrow \int f' \cdot g = fg - \int f \cdot g' .$$

La derivata si "scarica" da f a g.

Questa formula è utile quando $\int f \cdot g'$ è "più facile" di $\int f' \cdot g$.

ESEMPIO

$$\int \log x = \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\log x} = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= x \log x - \int 1$$

$$= x \log x - x + C$$

Per applicare questa formula bisogna riconoscere nell'integrando il prodotto di due funzioni, una delle quali sia immediatamente integrabile.

ESEMPI

- $\displaystyle\int \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = xe^x - \int e^x \cdot 1\,dx = xe^x - e^x + C$

- $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g}\,dx$

$$= -\cos x \sin x - \int (-\cos x)\cdot \cos x\,dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x \sin + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad 2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x + C$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C.$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Si parte dalla regola di derivazione della funzione composta.

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g'.$$

da cui

$$F \circ g = \int (F \circ g)' dx = \int (F' \circ g) \cdot g' \, dx$$

Ponendo $F' = f$, si ha

$$(1) \quad \int f(y)\, dy \Big|_{y=g(x)} = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

ovvero

$$(SD) \quad \boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy \Big|_{y=g(x)}}$$

questa è la formula di integrazione per sostituzione diretta.

Si applica quando nell'integrando si riconosce la struttura

$$f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Esempio

$$\int x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\boxed{2x}}_{g'} e^{\overbrace{\boxed{x^2}}^{g}} dx = ???$$

$$\gg = \frac{1}{2} \int \underset{\hookrightarrow f(y)}{\boxed{e^y}}\, dy \,\Big|_{y=x^2} = e^y \Big|_{y=x^2} + C$$

$$= e^{x^2} + C \,.$$

Se in (1) g è invertibile, si ha

$$\int f(y)\,dy \,\Big|_{y=g(g^{-1}(y))} = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx \,\Big|_{x=g^{-1}(y)}$$

da cui

$$\int f(y)\,dy = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx \,\Big|_{x=g^{-1}(y)}$$

e cambiando nome alle variabili di integrazione

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\, g'(t)\, dt \,\Big|_{t=g^{-1}(x)}} \quad (SI)$$

questa è la formula di sostituzione inversa.
Si applica quando si riesce a "invertire" una g invertibile in modo che $\int f(g(t))\, g'(t)\, dt$ sia "facile".

ESEMPIO

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \text{scelgo } g(t) = \cos t$$

$$= \int \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt \Big|_{t=\arccos x}$$

$$= -\int \sin^2 t\,dt \Big|_{t=\arccos x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \sin t \cos t\right)\Big|_{t=\arccos x} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\arccos x - \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}\,\cos(\arccos x)\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\arccos x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

Si tratta di integrare frazioni algebriche $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con P, Q polinomi in x.

ESEMPI INTRODUTTIVI

•) $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$

Scriviamo $\frac{1}{x(x-1)}$ come somma di frazioni semplici. Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Facendo il denominatore comune, si ha $A(x-1) + Bx = 1$, da cui

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \log|x-1| - \log|x| + c.$$

•) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx$

Cerchiamo A, B, C, D t.c.

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}}_{\substack{\text{perché il} \\ \text{fattore } x \text{ ha} \\ \text{molteplicità } 2}} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

facendo il denominatore comune, si ha

$$Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + x^2(Cx+D)$$

$$(A+C)x^3 + (D+B)x^2 + Ax + B = 1$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ D+B=0 \\ A=0 \\ B=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=1 \\ C=0 \\ D=-1 \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C$$

In generale

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

1) Se $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$, si fa la divisione e si scrive

$$P(x) = Q(x)N(x) + R(x) \quad \text{con } \deg R(x) < \deg Q(x)$$

Così si ha

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int N(x)\,dx}_{\text{polinomio}} + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Quindi non è restrittivo supporre che $\deg P(x) < \deg Q(x)$.

2) Si fattorizza il denominatore $Q(x)$

$$Q(x) = (x-a_1)^{p_1} \cdots (x-a_k)^{p_k} \cdot$$
$$\cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \cdots (x^2+\alpha_h x+\beta_h)^{q_h}$$

con $\alpha_j^2 - 4\beta_j < 0 \quad \forall j = 1, \dots, h$

e

$$p_1 + \cdots + p_k + 2q_1 + \cdots + 2q_h = \deg Q.$$

(qui abbiamo anche supposto che il coeff. principale di Q sia 1.).

3) Si trovano costanti

$$
\begin{array}{lll}
A_{1,1}, & \ldots\ldots, & A_{1,p_1} \\
\vdots & & \vdots \\
A_{k,1}, & \ldots\ldots, & A_{k,p_k}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllclll}
B_{1,1}, & \ldots\ldots, & B_{1,q_1} & \qquad & C_{1,1}, & \ldots\ldots, & C_{1,q_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
B_{h,1}, & \ldots\ldots, & B_{h,q_h} & & C_{h,1}, & \ldots\ldots, & C_{h,q_h}
\end{array}
$$

tali che

$$
\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \ldots\ldots + \frac{A_{1,p_1}}{(x-a_1)^{p_1}} + \ldots\ldots
$$

$$
+ \ldots\ldots + \frac{B_{h,1}\,x + C_{h,1}}{(x^2+\alpha_h x+\beta_h)} + \ldots\ldots + \frac{B_{h,q_h}x + C_{h,q_h}}{(x^2+\alpha_h x+\beta_h)^{q_h}}
$$

4) In questo modo ci si riconduce a calcolare integrali delle seguenti tipologie:

$$
\int \frac{1}{x-a}\,dx \;, \quad \int \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \quad (p>1)
$$

$$
\int \frac{bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)}\,dx \;, \quad \int \frac{bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx \quad (p>1)
$$

con $\alpha^2 - 4\beta < 0$

5) Immediatamente abbiamo

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^p}\,dx = -\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{(x-a)^{p-1}} + C \quad , \ p > 1.$$

6) $$\int \frac{bx+c}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \frac{b}{2}\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx + \int \frac{c-\frac{b\alpha}{2}}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$$

$$= \frac{b}{2}\log|x^2+\alpha x+\beta| + \left(c - \frac{b\alpha}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx$$

e

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \int \frac{1}{\left(x^2+\alpha x+\frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{\beta-\alpha^2}{4}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)}\,dx$$

$\left[\text{poiché } \beta - \frac{\alpha^2}{4} > 0\right]$

$$= \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right)}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}\right)^2 + 1}\,dx$$

e con un'opportuna sostituzione ci si riconduce a

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + C.$$

7) Analogamente, se $q > 1$

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx = \frac{b}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx + \int \frac{c-\frac{b\alpha}{2}}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx$$

$$= \frac{b}{2}\,\frac{-1}{q-1}\,\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}} + \left(c-\frac{b\alpha}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx$$

e $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,dx = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)\right]^q}\,dx$

Di nuovo, tramite un'opportuna sostituzione, ci si riconduce a calcolare

$$\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy \quad , \quad q > 1 .$$

8) L'integrale $\displaystyle\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy$, $q \geq 1$, si calcola per ricorrenza in questo modo.

Poniamo $\displaystyle I_q = \int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy$, $q \geq 1$.

per $q=1$, si ha $I_1 = \arctan y + c$

per $q \geq 2$, si ha

$$I_q = \int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy = \int \frac{1+y^2}{(1+y^2)^q}\,dy - \int \frac{y^2}{(1+y^2)^q}\,dy$$

$$= I_{q-1} - \int \frac{y}{2}\,\frac{2y}{(1+y^2)^q}\,dy =$$

$$= I_{q-1} + \frac{y}{2}\,\frac{1}{q-1}\,\frac{1}{(1+y^2)^{q-1}} - \frac{1}{2(q-1)}\,I_{q-1}$$