TEOREMA

Sia $g : [a,b] \longrightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$ strettamente crescente, derivabile, con g' integrabile, e $g(a) = \tilde{a}$, $g(b) = \tilde{b}$.

Sia $f : [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Allora

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(y)\,dy = \underbrace{\int_a^b (f \circ g)(x)\, g'(x)\, dx}_{\text{l'integrabilità di questo è parte della tesi.}}$$

Dim.

Sia $M := \sup_{[\tilde{a}, \tilde{b}]} |f|$

Sia $\varepsilon > 0$. $\exists$ una partizione P di $[a,b]$ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ t.c. posto

$$\tilde{P} := \{y_0, y_1, \dots, y_n\} := \{g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_n)\}$$

risulti

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} g' - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g' \right)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f - \inf_{[y_{i-1}, y_i]} f \right)(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

Osserviamo che, $\forall i$,

$$\left(\sup_{[y_{i-1},y_i]} f - \inf_{[y_{i-1},y_i]} f\right)(y_i - y_{i-1}) =$$

$$= \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}(f\circ g) - \inf_{[x_{i-1},x_i]}(f\circ g)\right)\left(g(x_i) - g(x_{i-1})\right)$$

$$= \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]}(f\circ g) - \inf_{[x_{i-1},x_i]}(f\circ g)\right) g'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$\boxed{\text{per Lagrange, } \exists\, \xi_i \in\,]x_{i-1}, x_i[\text{ t.c.}}$

Osserviamo anche che

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{[y_{i-1},y_i]} f\right)(y_i - y_{i-1}) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(y)\,dy\right| < \varepsilon$$

e

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\inf_{[y_{i-1},y_i]} f\right)(y_i - y_{i-1}) - \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(y)\,dy\right| < \varepsilon .$$

Sia ora $s_i \in]x_{i-1}, x_i[$ arbitrario.
Si ha:

$$(f\circ g)(s_i)\, g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$(f\circ g)(s_i)\, \underbrace{g'(\xi_i)\,(x_{i-1} - x_i)}_{=(y_i - y_{i-1})} + (f\circ g)(s_i)\,(g'(s_i) - g'(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \Big(\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f\Big)(y_i - y_{i-1}) + M\,|g'(s_i) - g'(\xi_i)|\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \Big(\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f\Big)(y_i - y_{i-1}) + M\Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} g' - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g'\Big)(x_i - x_{i-1})$$

Facendo il sup su $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$,
si ottiene

$$\Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f\circ g)\cdot g'\Big)(x_i - x_{i-1}) \leq \Big(\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f\Big)(y_i - y_{i-1})$$

$$+ M\Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} g' - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g'\Big)(x_i - x_{i-1})$$

Sommando su i, si ottiene (4)

$$\sum_i \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} (f\circ g)\cdot g' \Big)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_i \Big(\sup_{[y_{i-1}, y_i]} f\Big)(y_i - y_{i-1})$$

$$+ M \sum_i \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} g' - \inf_{[x_{i-1},x_i]} g'\Big)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(y)\,dy + \varepsilon + M \frac{\varepsilon}{M}$$

$$= \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(y)\,dy + 2\varepsilon$$

In modo analogo, si ottiene

$$\sum_i \Big(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} (f\circ g)\cdot g' \Big)(x_i - x_{i-1}) \geq \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(y)\,dy - 2\varepsilon$$

Da cui

$$U\big((f\circ g)\cdot g', P\big) - L\big((f\circ g)\cdot g'\big) < 4\varepsilon,$$

quindi $(f\circ g)\cdot g'$ è integrabile, e per l'arbitrarietà di ε si ha

$$\int_a^b (f\circ g)(x)\, g'(x)\,dx = \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(y)\,dy. \qquad \blacksquare$$