

Esame di Programmazione Informatica

13 settembre 2024

Esercizio 1 (16/30)

Si consideri un polinomio $p(x)$ di grado n , centrato in $x = x_0$ ed identificato dai suoi coefficienti a_i :

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i \quad (1)$$

Sviluppando le potenze di binomio si ottiene la seguente espressione:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\left[\sum_{k=i}^n a_k \binom{k}{i} (-x_0)^{k-i} \right]}_{b_i} x^i = \sum_{i=0}^n b_i x^i \quad (2)$$

che rappresenta quindi lo stesso polinomio nella forma classica, ossia centrata in $x = 0$.

Scrivere una funzione MATLAB che prenda come argomenti in ingresso:

- il vettore $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_n]$ dei coefficienti a_i della forma iniziale, ossia quella centrata in $x = x_0$,
- il centro x_0 ,

e restituisca come argomento in uscita il vettore $\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_n]$ dei coefficienti b_i dell'ultima forma, ossia quella centrata in $x = 0$. Utilizzare la funzione MATLAB `nchoosek(k,i)` per calcolare il coefficiente binomiale $\binom{k}{i}$.

Mostrare poi come utilizzare la precedente funzione per ottenere il vettore $\mathbf{b}$ nel caso di polinomio $p(x) = 1 + 3(x - 1) - 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)^4$. Che coefficienti si ottengono?

Soluzione: implementiamo la funzione mediante un doppio ciclo **for**: il ciclo più esterno sarà quello relativo all'indice i che assegnerà gli $n + 1$ coefficienti b_i , mentre quello più interno sarà quello relativo all'indice k ed eseguirà il calcolo di un singolo b_i tramite la sommatoria della formula. Ricaviamo il grado n dalla lunghezza del vettore dei coefficienti e facciamo attenzione alla corrispondenza tra indici dei coefficienti del polinomio e indici dei vettori in MATLAB $a_i = a(i+1)$:

coefficientiPolinomio.m

```
function b = coefficientiPolinomio(a, x0)
    n = length(a) - 1 ;
    b = 0*a ;
    for i = 0 : n
        bi = 0 ;
        for k = i : n
            ak = a(k+1) ;
            bi = bi + ak * nchoosek(k,i) * (-x0)^(k-i) ;
        end
        b(i+1) = bi ;
    end
end
```

Utilizzo nel caso $p(x) = 1 + 3(x - 1) - 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)^4$:

```
a = [1, 3, -3, 0, 4] ;
x0 = 1 ;
b = coefficientiPolinomio(a, x0)
```

ottenendo $\mathbf{b} = [-1, -7, 21, -16, 4]$, ossia $p(x) = -1 - 7x + 21x^2 - 16x^3 + 4x^4$.

Esercizio 2 (17/30)

Dato un pendolo semplice di lunghezza l , il periodo T delle oscillazioni è dato dalla seguente formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \sin^i \frac{\theta}{2} \right)^2 \right] \quad (3)$$

dove g è l'accelerazione di gravità, θ è il massimo spostamento angolare ($\theta = 0$ quando il pendolo è verticale in posizione di riposo, $\theta = \pi/2$ quando è orizzontale) e $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 1$ è il fattoriale doppio.

Scrivere una funzione MATLAB che prenda come argomenti in ingresso:

- la lunghezza del pendolo l ,
- l'accelerazione di gravità g ,
- il massimo spostamento angolare θ ,
- il massimo numero N di termini della serie da considerare,

e restituisca come argomento in uscita il corrispondente valore del periodo delle oscillazioni T . (Suggerimento: implementare il calcolo dei fattoriali doppi mediante definizione di una funzione anonima usando le funzioni/sintassi messe a disposizione da MATLAB per operare su vettori, in particolare la funzione `prod` e la sintassi con doppi doppi punti `a:b:c` per generare un vettore opportuno).

Mostrare poi come utilizzare la precedente funzione per calcolare il periodo di oscillazione nel caso di $l = 1$ m, $g = 9.81$ m/s² e $\theta = \pi/2$. Che periodo di oscillazione si ottiene utilizzando N crescenti, per esempio $N = 2, 5, 20$?

Soluzione: Definiamo innanzitutto la funzione anonima `ff` per calcolare il doppio fattoriale mediante `ff = @(n) prod(n:-2:1)`, procediamo poi con un ciclo `for` per calcolare la somma richiesta:

`periodoPendolo.m`

```
function T = periodoPendolo(l, g, theta, N)
    ff = @(n) prod(n:-2:1) ;
    somma = 1 ;
    for i = 1 : N
        somma = somma + ( ff(2*i-1) / ff(2*i) * sin(theta/2)^i )^2 ;
    end
    T = 2*pi*sqrt(l/g) * somma ;
end
```

Utilizzo nel caso richiesto:

```
l = 1 ;
g = 9.81 ;
theta = pi/2 ;
for N = [2, 5, 20]
    periodoPendolo(l, g, theta, N)
end
```

ottenendo 2.33, 2.37 e 2.37 s.