

Alcuni prerequisiti per il corso di Analisi 1 (breve vademecum, da perfezionare)

Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2024/2025

1 Un accenno ai simboli della logica

Nel linguaggio matematico abbiamo a che fare con proposizioni, che indichiamo con $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ecc. Inoltre, siamo soliti combinare queste proposizioni in vari modi:

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}, \quad \mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}, \quad \mathcal{P} \implies \mathcal{Q}, \quad \mathcal{P} \iff \mathcal{Q}.$$

Cercheremo ora di spiegarne meglio il significato. Iniziamo con

$$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}.$$

Essa è vera se sono vere entrambe, sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{Q}$; altrimenti è falsa. Possiamo costruire una tabellina che contempli tutti i quattro casi possibili: ¹

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vediamo ora

$$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}.$$

Essa è vera se almeno una delle due è vera; è falsa solo quando sono entrambe false, sia $\mathcal{P}$ che $\mathcal{Q}$. Ecco quindi la corrispondente tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

¹In queste tabelle, V indica che una proposizione è vera, mentre F indica che è falsa.

Analizziamo ora

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}.$$

Essa è falsa solo se $\mathcal{P}$ è vera e $\mathcal{Q}$ è falsa; in tutti gli altri casi è vera. Ecco la sua tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Concludiamo con

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}.$$

Essa è vera se le due sono entrambe vere, oppure entrambe false. Altrimenti, è falsa. Vediamone la tabellina:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

È molto importante saper negare logicamente una proposizione. La negazione di $\mathcal{P}$ verrà indicata con $\neg \mathcal{P}$ (si legge “non $\mathcal{P}$ ”): essa è vera quando $\mathcal{P}$ è falsa, e viceversa. Ad esempio, valgono le seguenti *Regole di de Morgan*:

$$\neg(\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \neg \mathcal{P} \text{ o } \neg \mathcal{Q}.$$

$$\neg(\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \neg \mathcal{P} \text{ e } \neg \mathcal{Q}.$$

Si può inoltre verificare che

$$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \quad \text{è equivalente a} \quad \neg \mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}.$$

Ne segue che

$$\neg(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}) \quad \text{è equivalente a} \quad \mathcal{P} \text{ e } \neg \mathcal{Q}.$$

Talvolta le proposizioni coinvolgono una o più variabili. Ad esempio, potremmo averne del tipo $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$, in cui compare la variabile x . In questi casi, troveremo spesso i seguenti due tipi di proposizioni. La prima, ²

$$\forall x \in A : \mathcal{P}(x),$$

significa

“per ogni elemento x dell’insieme A si ha che $\mathcal{P}(x)$ è vera”.

²Il simbolo $\in$ verrà introdotto nella prossima sezione.

La seconda,

$$\exists x \in A : \mathcal{P}(x),$$

significa

“esiste almeno un elemento x dell’insieme A per cui si ha che $\mathcal{P}(x)$ è vera”.

Vediamo come si esprimono le loro negazioni. Si ha che

$$\neg(\forall x \in A : \mathcal{P}(x)) \quad \text{è equivalente a} \quad \exists x \in A : \neg \mathcal{P}(x),$$

mentre

$$\neg(\exists x \in A : \mathcal{P}(x)) \quad \text{è equivalente a} \quad \forall x \in A : \neg \mathcal{P}(x).$$

2 Il linguaggio della teoria degli insiemi

2.1 I primi simboli

Ci risultano più o meno familiari alcuni insiemi numerici, quali ad esempio

- $\mathbb{N}$, l’insieme dei numeri naturali;
- $\mathbb{Z}$, l’insieme dei numeri interi relativi;
- $\mathbb{Q}$, l’insieme dei numeri razionali;
- $\mathbb{R}$, l’insieme dei numeri reali.

La loro natura verrà ulteriormente approfondita durante le lezioni. D’altra parte, nel corso dei nostri studi, abbiamo incontrato diversi tipi di insiemi, e molti altri ne incontreremo in seguito. Per poterli trattare in maniera corretta, abbiamo bisogno di sviluppare un linguaggio, e per questo introdurremo ora alcuni simboli, e ne spiegheremo il significato.

Introduciamo il simbolo di “appartenenza”. La scrittura

$$a \in A$$

significa “ a appartiene all’insieme A ”, ossia “ a è un elemento di A ”. La sua negazione si scrive $a \notin A$ e si legge “ a non appartiene ad A ”, ovvero “ a non è un elemento di A ”.

Ad esempio, sia $A = \{1, 2, 3\}$, l’insieme ³ i cui elementi sono i tre numeri naturali 1, 2 e 3. Abbiamo che

$$1 \in A, \quad 2 \in A, \quad 3 \in A,$$

mentre

$$4 \notin A, \quad \frac{1}{2} \notin A, \quad \pi \notin A.$$

³In questo esempio, l’insieme A viene definito elencandone gli elementi, che sono in numero finito.

Presentiamo ora il simbolo di “inclusione”. Scriveremo

$$A \subseteq B$$

e leggeremo “ A è contenuto in B ” qualora ogni elemento di A sia anche un elemento di B . In simboli,

$$x \in A \implies x \in B.$$

Ad esempio, se come sopra $A = \{1, 2, 3\}$, si ha che $A \subseteq \mathbb{N}$, ma anche $A \subseteq \mathbb{R}$.

Se $A \subseteq B$, si dice che A è un “sottoinsieme” di B , e si può scrivere anche $B \supseteq A$. La negazione di $A \subseteq B$ si scrive $A \not\subseteq B$, oppure $B \not\supseteq A$, e si legge “ A non è contenuto in B ”, oppure “ B non contiene A ”.

Diremo che due insiemi A e B sono “uguali” se coincidono, ossia se hanno gli stessi elementi, e in tal caso scriveremo

$$A = B.$$

Si ha pertanto

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

La negazione di $A = B$ si scrive $A \neq B$; in tal caso si dice che A e B sono diversi, ovvero non coincidono. Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, si dice che A è un “sottoinsieme proprio” di B .

Notiamo che sono soddisfatte le proprietà di una “relazione d’ordine”:

- $A \subseteq A$;
- $A \subseteq B$ e $B \subseteq A \implies A = B$;
- $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \implies A \subseteq C$.

Concludiamo questa sezione introducendo un insieme molto particolare: si tratta dell’“insieme vuoto”, un insieme che non possiede alcun elemento. Esso viene indicato con il simbolo

$$\emptyset.$$

Si conviene che $\emptyset$ sia sottoinsieme di qualsiasi insieme:

$$\emptyset \subseteq A, \quad \text{per qualsiasi } A.$$

2.2 Alcuni esempi di insiemi

Iniziamo con gli insiemi più semplici, quelli che hanno un unico elemento. Ad esempio,

$$A = \{3\}, \quad A = \{\mathbb{N}\}, \quad A = \{\emptyset\}.$$

Il primo è l’insieme che ha come unico elemento il numero naturale 3. Il secondo ha come unico elemento $\mathbb{N}$, il terzo ha solo l’elemento $\emptyset$. Osserviamo

quindi che gli elementi di un insieme possono essere a loro volta degli insiemi. Potremmo avere insiemi del tipo

$$A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}, \quad A = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}, \quad A = \{\{\pi\}, \{1, 2, 3\}, \mathbb{N}\},$$

oppure anche del tipo

$$A = \{3, \{3\}, \mathbb{N}, \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}\}.$$

In questo caso bisogna fare attenzione con i simboli: si ha che $3 \in A$, per cui $\{3\} \subseteq A$, ma anche $\{3\} \in A$, essendo $\{3\}$ un elemento di A .

Vediamo infine l'insieme

$$A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Abbiamo che $\emptyset \in A$, essendo $\emptyset$ uno degli elementi di A , e pertanto $\{\emptyset\} \subseteq A$. Ma abbiamo anche $\{\emptyset\} \in A$, essendo $\{\emptyset\}$ un elemento di A , e quindi $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$. Ricordiamo inoltre che si ha pure $\emptyset \subseteq A$.

2.3 Operazioni con gli insiemi

Normalmente si preferisce scegliere un “insieme universo” in cui lavorare. Lo denoteremo con E . Tutti gli oggetti di cui parleremo in seguito faranno parte di tale insieme.

Si definisce “l'intersezione” di due insiemi A e B : è l'insieme ⁴

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\},$$

i cui elementi appartengono ad entrambi gli insiemi. Si noti che l'intersezione potrebbe anche essere l'insieme vuoto: in tal caso, si dice che A e B sono “disgiunti”.

Invece, “l'unione” di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\},$$

i cui elementi appartengono ad almeno uno dei due insiemi, possibilmente anche ad entrambi.

La “differenza” di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\},$$

i cui elementi appartengono al primo insieme ma non al secondo.

⁴Qui gli insiemi sono definiti specificando le proprietà che devono soddisfare i loro elementi.

In particolare, l'insieme $E \setminus A$ si chiama “complementare” di A e si denota con $\mathcal{C}A$. Pertanto, si ha

$$\mathcal{C}A = \{x : x \notin A\}.$$

Sono interessanti le seguenti *Regole di De Morgan*:

$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B, \quad \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B.$$

Il “prodotto” di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

i cui elementi sono le “coppie ordinate” (a, b) , in cui al primo posto abbiamo un elemento di A e al secondo posto uno di B .

2.4 Il concetto di funzione

Una “funzione” (talvolta “applicazione”) è definita assegnando tre insiemi:

- un insieme A , detto “dominio” della funzione;
- un insieme B , detto “codominio” della funzione;
- un insieme $G \subseteq A \times B$, detto “grafico” della funzione, con la seguente proprietà:

per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in G$.

La funzione così definita può essere indicata con $f : A \rightarrow B$ (si legge “ f va da A a B ”). Ad ogni elemento a del dominio viene pertanto associato un ben determinato elemento b del codominio: tale b verrà indicato con $f(a)$, e scriveremo $a \mapsto f(a)$. Abbiamo quindi

$$(a, b) \in G \iff b = f(a),$$

ossia

$$G = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} = \{(a, f(a)) : a \in A\}.$$

Ad esempio, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(n) = n/(n+1)$,⁵ associa ad ogni $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ il corrispondente valore $n/(n+1)$, ossia

$$n \mapsto \frac{n}{n+1}.$$

Pertanto, si avrà

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto \frac{1}{2}, \quad 2 \mapsto \frac{2}{3}, \quad 3 \mapsto \frac{3}{4}, \quad \dots$$

Una funzione il cui dominio sia l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali si chiama anche “successione”, e si usa spesso una notazione differente: se $s : \mathbb{N} \rightarrow B$ è una tale successione, invece di $s(n)$ si usa scrivere s_n , e la successione stessa si denota con $(s_n)_n$.

⁵Si noti che i valori di questa funzione sono numeri razionali, per cui avremmo potuto definire con la stessa formula una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Una tale funzione è comunque diversa dalla precedente, in quanto le due non hanno lo stesso codominio.

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ il suo quadrato. Si osservi che

$$f(-x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Diremo che una tale funzione è “pari”. Se invece, come avviene per la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$, si ha che

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

diremo che una tale funzione è “dispari”. Naturalmente, una funzione potrebbe non essere né pari né dispari.

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow B$, dove B è un qualsiasi insieme, si dice “periodica” se esiste un numero reale $T > 0$ per cui

$$f(x + T) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ad esempio, sono periodiche le funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, ...).

L’“immagine” della funzione $f : A \rightarrow B$ è l’insieme

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

e, in generale, per ogni insieme $U \subseteq A$, possiamo scrivere

$$f(U) = \{f(a) : a \in U\};$$

è l’immagine della funzione $f|_U$, la restrizione di f al dominio U .

La “composta” di due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ è la funzione $g \circ f : A \rightarrow C$ definita da

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

La funzione composta $g \circ f$ può essere definita anche nel caso in cui $f : A \rightarrow \widehat{B}$, con $\widehat{B} \neq B$, purché l’immagine di f sia un sottoinsieme del dominio di g , ossia $f(A) \subseteq B$.

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice

- “iniettiva”, se $a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$;
- “suriettiva”, se $f(A) = B$;
- “biiettiva”, se è sia iniettiva che suriettiva.

Se $f : A \rightarrow B$ è biiettiva, allora per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (f è suriettiva), e tale elemento a è unico (f è iniettiva). Si può pertanto definire una funzione da B ad A , che ad ogni $b \in B$ associa quell’unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Si tratta della “funzione inversa” di $f : A \rightarrow B$, che viene indicata con $f^{-1} : B \rightarrow A$. Si ha quindi

$$f(a) = b \iff a = f^{-1}(b).$$

Per qualsiasi funzione f , sia essa invertibile o meno, dato un insieme $V \subseteq B$ è prassi comune scrivere

$$f^{-1}(V) = \{a \in A : f(a) \in V\}.$$

Questo è il cosiddetto “insieme delle controimmagini” di V ; esso è composto da quegli elementi a di A i cui elementi associati $f(a)$ appartengono a V .

Per concludere questa breve presentazione sulle funzioni, ricordiamo che, date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : A \rightarrow B$, se il codominio B è dotato di un'operazione di addizione, possiamo definire la funzione $f + g : A \rightarrow B$ come segue:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a).$$

Simili definizioni possono essere date per la differenza, il prodotto e il quoziente di due funzioni:

$$(f - g)(a) = f(a) - g(a),$$

$$(fg)(a) = f(a)g(a),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

3 La sommatoria

Risulta talvolta utile introdurre una notazione particolare per esprimere una somma di n elementi del tipo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Il simbolo usato è

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

e si legge “somma degli α_k per k che va da 1 a n ”. Viene quindi introdotto un indice, qui indicato con k , e gli si fanno assumere tutti i valori interi da 1 a n . Che l'indice sia indicato con la lettera k non è per nulla significativo: si può benissimo usare una qualsiasi altra lettera e scrivere, ad esempio

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell, \quad \sum_{m=1}^n \alpha_m, \quad \sum_{\star=1}^n \alpha_\star, \quad \dots$$

Si noti che la stessa somma potrebbe anche essere scritta come

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1}, \quad \sum_{k=2}^{n+1} \alpha_{k-1}, \quad \sum_{k=3}^{n+2} \alpha_{k-2}, \quad \dots$$

e anche, volendo, come

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{n+1-k}.$$

Ci sono quindi molte varianti nella notazione di sommatoria.

È conveniente definire $\sum_{k=1}^n \alpha_k$ anche nel caso in cui sia $n = 1$: si pone semplicemente

$$\sum_{k=1}^1 \alpha_k = \alpha_1,$$

Vediamo ora due proprietà della sommatoria.

Prima proprietà:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k + \sum_{k=1}^n \beta_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_k + \beta_k),$$

ovvero

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n).$$

Seconda proprietà:

$$\sum_{k=1}^n (C\alpha_k) = C \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right),$$

ovvero

$$C\alpha_1 + C\alpha_2 + \dots + C\alpha_n = C(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$