CdS Mat, CdS Fis, Esame di Analisi 1, 14/2/2018 A

Nome e Cognome ....

Corso di studi .... **Del Santo** $\square$ **Fonda** $\square$

Esercizio 1. (3+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x \log(\log(e-e^{-x})) = \boxed{-\frac{1}{e}}.$$

i) Si pone $\frac{1}{x} = t$ e si ottiene

$$\lim_{t\to0^+}\lim_{t\to0^+} = \lim_{t\to0^+} \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t-t^2}}{t\sqrt{t}} \cdot \frac{\sqrt{t}+\sqrt{t-t^2}}{\sqrt{t}-\sqrt{t-t^2}}$$

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{t-(t-t^2)}{t\sqrt{t}(\sqrt{t}-\sqrt{t-t^2})} = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{(1-\sqrt{1-t})} = \frac{1}{2}.$$

ii) Si pone $e^{-x} = t$ e si ottiene

$$\lim_{t\to0^+} \frac{\log(\log(e-t))}{t} \underset{H}{\Longleftarrow} \lim_{t\to0^+} \frac{1}{\log(e-t)}\frac{1}{e-t}\cdot(-1) = -\frac{1}{e}$$

Esercizio 2. (6 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \log x,$$

determinando

i) Dominio: $\boxed{D = \{x\in\mathbb{R} \,:\, x>0\}}$.

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\log x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\log x = +\infty.$$

iii) Derivata prima $f'(x) = \boxed{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-1} \quad = \quad \frac{x-2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}}$

e suo segno.

Si pone $\sqrt{x} = t$ e si ottiene al numeratore t^2-2t-1. Si studia $t^2-2t-1 \geq 0$. Si ottiene $t \leq 1-\sqrt{2}$ e $t \geq 1+\sqrt{2}$. Però $t = \sqrt{x}$, quindi si ha

$$\begin{array}{lcll} 0<\sqrt{x}<1+\sqrt{2} & \Longleftrightarrow & 0<x<3+2\sqrt{2} & \Rightarrow f'(x)<0 \\ \sqrt{x}=1+\sqrt{2} & \Longleftrightarrow & x=3+2\sqrt{2} & \Rightarrow f'(x)=0 \\ \sqrt{x}>1+\sqrt{2} & \Longleftrightarrow & x>3+2\sqrt{2} & \Rightarrow f'(x)>0 \end{array}$$

iii) Intervalli di crescenza e decrescenza. Punti di massimo e di minimo.

Si ha

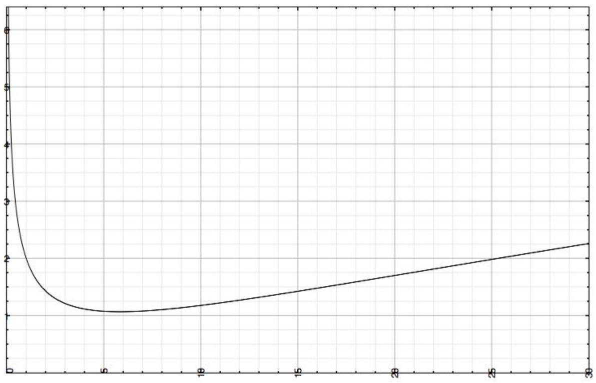
$$\begin{array}{lll} 0 < \sqrt{x} < 1+\sqrt{2} & \iff 0 < x < 3+2\sqrt{2} & \Rightarrow f \text{ decrescente} \\ \sqrt{x} = 1+\sqrt{2} & \iff x = 3+2\sqrt{2} & \Rightarrow x \text{ punto di minimo} \\ \sqrt{x} > 1+\sqrt{2} & \iff x > 3+2\sqrt{2} & \Rightarrow f \text{ crescente} \end{array}$$

v) Derivata seconda $f''(x) = \boxed{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + x^{-2} \quad = \quad -\frac{x-4\sqrt{x}-3}{4x^2\sqrt{x}}}$ e suo segno.

Si pone $\sqrt{x} = t$ e si ottiene al numeratore t^2-4t-3. Si studia $t^2-4t-3 \leq 0$. Si ottiene $2-\sqrt{7} \leq t \leq 2+\sqrt{7}$. Però $t = \sqrt{x}$, quindi si ha

$$\begin{array}{lll} 0 < \sqrt{x} < 2+\sqrt{7} & \iff 0 < x < 11+4\sqrt{7} & \Rightarrow f''(x) > 0 \\ \sqrt{x} = 2+\sqrt{7} & \iff x = 11+4\sqrt{7} & \Rightarrow f''(x) = 0 \\ \sqrt{x} > 2+\sqrt{7} & \iff x > 11+4\sqrt{7} & \Rightarrow f''(x) < 0 \end{array}$$

vi) Grafico di f.



Esercizio 3. (4 pt) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$e^x = \alpha x.$$

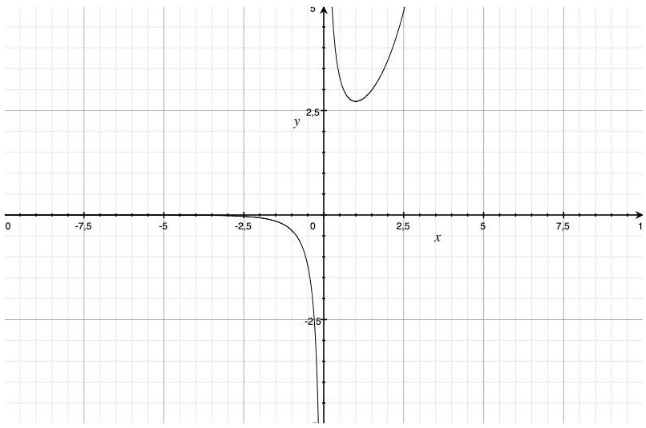
È opportuno effettuare un mini-studio della funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si ha poi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

$f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$, quindi

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\quad \text{per } x > 1, \\ f'(x) = 0 &\quad \text{per } x = 1, \text{ da cui 1 punto di minimo con } f(1) = e \\ f'(x) < 0 &\quad \text{per } x < 0 \text{ oppure } 0 < x < 1. \end{aligned}$$



Quindi, confrontando il grafico con le rette orizzontali $y = \alpha$, si deduce che vi è
- una soluzione per $\alpha < 0$;
- nessuna soluzione per $0 \leq \alpha < e$;
- una soluzione per $\alpha = e$;
- due soluzioni per $\alpha > e$.

Esercizio 4. (2+2+2+3 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si supponga $f(-1) = f(2) = 0$.

i) Si provi che $f(0) \leq 0$.

La secante per i punti del grafico $(-1, 0)$ e $(2, 0)$ è la retta $y = 0$. Il punto $(0, f(0))$ deve stare "sotto" la secante: quindi $f(0) \leq 0$. Alternativamente

$$0 = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot (2)$$

quindi

$$f(0) = f(\frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot (2)) \leq \frac{2}{3} f(-1) + \frac{1}{3} f(2) = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0.$$

ii) Si provi che f ha minimo assoluto.

Uso la caratterizzazione delle funzioni convesse. Sia $x > 2$. Allora

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \geq \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \quad \text{quindi} \quad \frac{f(x)}{x - 2} \geq 0 \quad \text{quindi} \quad f(x) \geq 0.$$

Analogamente per $x < -1$ si ottiene $f(x) \geq 0$.

f e continua, perché è convessa. Il minimo assoluto della f ristretta a $[-1, 2]$ (che esiste per Weierstrass) è quindi il minimo della f su tutto $\mathbb{R}$.

iii) Si provi che esistono $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Dal punto precedente so che per ogni $x \geq 2$ vale $f(x) \geq 0$. Si possono realizzare quindi i due seguenti casi

- f è la costante 0 su $[2, +\infty[$. Quindi il limite per $x \to +\infty$ è 0.
- esite $\bar{x} > 2$ tale che $f(\bar{x}) > 0$. Allora per $x > \bar{x}$ vale

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \geq \frac{f(\bar{x}) - f(2)}{\bar{x} - 2} = \frac{f(\bar{x}) - 0}{\bar{x} - 2} = \rho > 0.$$

Allora, per $x > \bar{x}$, vale

$$f(x) \geq \rho(x - \bar{x}) + f(\bar{x}).$$

Quindi f sta "sopra" la retta $y = \rho(x-\bar{x}) + f(\bar{x})$ che ha pendenza positiva e quindi per per $x \to +\infty$, tende a $+\infty$. Per $x < -1$ si fa in modo analogo.

iv) Si provi che se i limiti precedenti non sono 0 allora sono $+\infty$.

Svolto al punto precedente.

Esercizio 5. (4+4 pt) Si calcoli

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \boxed{\frac{4}{3}}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_0^x t \arcsin t \, dt}{\sin x^3} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

i) Basta effettuare la sostituzione $\cos x = t$. Si ottiene

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx$$

$$= -\int_1^{-1} (1 - t^2) \, dt = \int_{-1}^{1} (1 - t^2) \, dt = (t - \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}) = \frac{4}{3}.$$

ii) Detta F una primitiva di $t \mapsto t \arcsin t$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x t \arcsin t \, dt}{\sin x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{\sin x^3} \underset{\text{H}}{\Longleftarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{x \arcsin x}{3x^2 \cos x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x}{x} \frac{1}{3 \cos x^3} = \frac{1}{3}.$$