CdS Mat, CdS Fis, Esame di Analisi 1, 01/2/2019 A

Nome e Cognome ....

Corso di studi .... **Del Santo** ☐ **Fonda** ☐

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\operatorname{arcsen} x} = \boxed{}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x\sqrt{x})^x - x^{x\sqrt{x}}}{x^{x^2} - (x^2)^x} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \log(x+1) - \frac{x+1}{x-1},$$

determinando

i) Dominio: $\boxed{}$.

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$ $\boxed{}$

e suo segno.

iii) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$ $\boxed{}$

vi) Grafico di f.

vii) Si dica se esiste ed eventualmente si determini una funzione g che su ciascuno degli intervalli del dominio della f sia una primitiva di f e sia $g(0) = g(2) = 0$. Si dica se tale g è unica.

Esercizio 3. (2+2+2 pt) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(1 + 2x).$$

i) Usando l'induzione su n si provi che, per $n \geq 1$, si ha

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} 2^n (n-1)!(1 + 2x)^{-n}.$$

ii) Si scriva la formula di Taylor con il resto di Lagrange per $f(x)$ con punto iniziale 0 e $n = 4$.

iii) Si determini il valore di $\log \frac{3}{2}$ con un errore minore o uguale a 10^{-2}.

Esercizio 4. (2+3+3 pt) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Si supponga $f(a) = f(b) = 0$ e, per ogni $x \in \,]a, b[$, sia $f(x) > 0$.

i) Si provi che $f'(a) \geq 0$ e $f'(b) \leq 0$.

Siano f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili. Si supponga $f(a) = f(b) = 0$, per ogni $x \in \,]a, b[$ sia $f(x) > 0$ e per ogni $x \in [a, b]$ sia $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0$.

ii) Si provi che esiste $\xi \in \,]a, b[$ tale che $g(\xi) = 0$.

iii) Si provi che il numero reale ξ determinato al punto ii) è unico.