

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(\sin x) - x}{x^3} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\exp(2x) - \frac{\exp(x^2)}{x^4} \right) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \exp(\log(2x) - x),$$

determinando

i) Dominio:

ii) Limiti alla frontiera del dominio ed eventuali asintoti.

iii) Derivata prima $f'(x) =$.

iv) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Intervalli dove f è convessa o concava. Eventuali punti di flesso.

vii) Grafico di f .

viii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\exp(\log(2x) - x) = \alpha.$$

Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$, e si supponga

$$f'(x) \leq 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x^2 - x f(x)$. Dimostrare che:

i) $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

ii) se $f'(0) < 1$, allora $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$;

iii) se la retta di equazione $y = x$ è un asintoto a $+\infty$ per f , allora

$$g(x) = 0 \text{ per ogni } x \geq 0.$$

Esercizio 4. (3+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^1 (x-1)^2 e^x dx = \boxed{}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \sin x dx = \boxed{}.$$