

Nome e Cognome .....

Corso di studi ..... Del Santo  Fonda

N.B.: scrivere le risposte nei riquadri e svolgere i calcoli a giustificazione delle risposte negli spazi tra un testo e l'altro. Aggiungere fogli **solamente** se serve ulteriore spazio. Non consegnare la brutta copia.

---

**Esercizio 1.** (2+3+3+2 pt)

Si calcolino i seguenti limiti

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(3 + \sin x)}{x} = \boxed{\phantom{0}},$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \boxed{\phantom{0}},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x + 1) \log(x + 1)}{x^2} = \boxed{\phantom{0}}.$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \boxed{\phantom{0}}.$$

---

**Esercizio 2.** (8 pt)

Si studi la funzione

$$f(x) = \log(e^{2x} - e^x + 1),$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Segno:

iii) Limiti agli estremi del dominio:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima  $f'(x) =$   
e suo segno.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda  $f''(x) =$   
e suo segno.

viii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di  $f$ .

x) Dire, al variare di  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ , quante soluzioni ha l'equazione

$$\log(e^{2x} - e^x + 1) = \alpha.$$

---

**Esercizio 3.** (5 pt) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Si provi che se l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha per soluzioni i valori  $x = 0$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$ , allora l'equazione

$$f'(x) = 0$$

ha almeno due soluzioni nell'intervallo  $]0, 2[$ .

**Esercizio 4.** (2+2+3 pt)

i) Si calcoli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \boxed{\phantom{000000}},$$

ii)

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx = \boxed{\phantom{000000}},$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \log t^4 \, dt = \boxed{\phantom{000000}}.$$