

Nome e Cognome

Corso di studi: Fisica Matematica

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(\sinh x) - \sin(x)}{3 \tanh(x^3)} = \boxed{},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4}{x+1} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan(x^3) \right) = \boxed{}.$$

(Potrebbe essere utile la formula $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.)

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 1|},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Eventuali simmetrie:

iii) Limiti importanti:

iv) Eventuali asintoti:

v) Derivata prima $f'(x) =$

e suo segno, dove definita.

vi) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vii) Derivata seconda $f''(x) =$

e suo segno, dove definita.

viii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Dimostrare che:

i) esiste almeno un punto in cui la funzione si annulla;

ii) la funzione non è né concava né convessa;

iii) la derivata f' ha un punto di massimo locale;

iv) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{3 \tan x}}{2(\sin^2 x - 1)} dx = \boxed{},$$

$$\int_{-2}^3 (|x^2 - 1| - 1) x^2 dx = \boxed{}.$$