Esame di Analisi Matematica 1 del 17/1/2024 Fila A

Nome e Cognome ....

Corso di studi: **Fisica** □ **Matematica** □

Esercizio 1. Limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(\sinh x)-\sin(x)}{3\tanh(x^3)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(\sinh x)-x+x-\sin(x)}{x^3}\frac{x^3}{\tanh(x^3)}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(\sinh x)-1}{x^2}+\frac{x-\sin(x)}{x^3}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\tanh(x^3)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sinh x)-1}{(\sinh x)^2}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^2+\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x^3}\right)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tanh(t)}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sinh x)-1}{(\sinh x)^2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}\right)^2+\frac{1}{6}\right)\cdot 1$$
$$=\frac{1}{3}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\cos(t)-1}{t^2}\cdot 1^2+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{9}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x+1}\left(1-\frac{2}{\pi}\arctan(x^3)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4}{x+1}\left(1-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}x^3\arctan\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}\lim_{t\to 0^+}\frac{\arctan(t)}{t}=\frac{2}{\pi}\cdot 2\cdot 1=\frac{4}{\pi}\,.$$

Esercizio 2. Studio di funzione:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x+1|}\,,$$

i) Dominio: $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. Si noti che

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2-4}{x+1} & \text{se } x<-1\,,\\[2mm] \dfrac{x^2-4}{x+1} & \text{se } x>-1\,.\end{cases}$$

ii) Non ci sono simmetrie evidenti.

iii) Limiti importanti:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\,,$$
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to-1^+}f(x)=-\infty\,.$$

iv) Eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=1\,,$$

quindi $y=-x+1$ è un asintoto a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1\,,$$

quindi $y=x-1$ è un asintoto a $-\infty$.

v) Derivata prima:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} & \text{se } x<-1\,,\\[2ex] \dfrac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} & \text{se } x>-1\,.\end{cases}$$

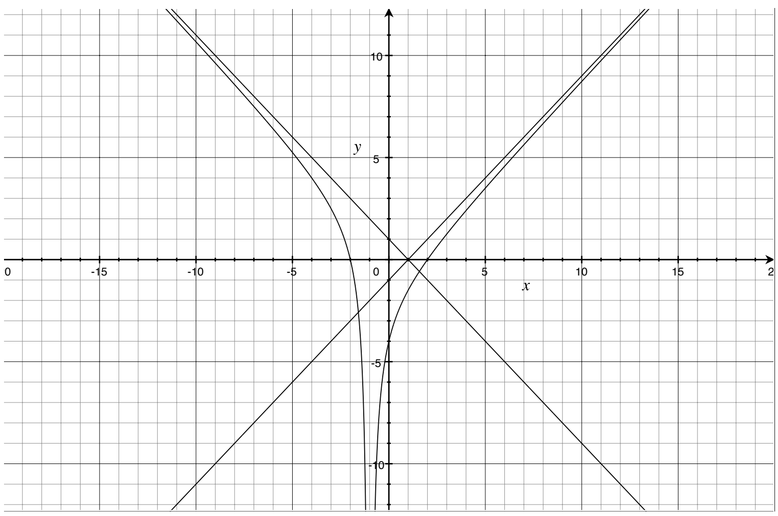
vi) La funzione è strettamente decrescente su $]-\infty,-1[$ e strettamente crescente su $]-1,+\infty[$. Non ci sono punti di massimo o di minimo locali.

vii) Derivata seconda:

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{(x+1)^3} & \text{se } x<-1\,,\\[2ex] -\dfrac{6}{(x+1)^3} & \text{se } x>-1\,.\end{cases}$$

viii) La funzione è strettamente concava su $]-\infty,-1[$ e su $]-1,+\infty[$. Non ci sono punti di flesso.

ix) Grafico di f:



Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, tale che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty\,.$$

Dimostrare che:

i) esiste almeno un punto in cui la funzione si annulla.

Usando le definizioni di limite, possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che

$$x \in]0,\delta] \;\Rightarrow\; f(x) > 0\,, \qquad x \in [1-\delta, 1[\;\Rightarrow\; f(x) < 0\,.$$

Siccome f è derivabile, essa è continua ed essendo $f(\delta) > 0 > f(1-\delta)$, il teorema degli zeri ci assicura l'esistenza di un punto in $]\delta, 1-\delta[$ in cui f si annulla.

ii) la funzione non è né concava né convessa.

Infatti, se fosse convessa dovrebbe stare al di sopra delle tangenti al suo grafico, per cui non potrebbe avere limite $-\infty$ a destra. Analogamente, se fosse concava dovrebbe stare al di sotto delle tangenti al suo grafico, per cui non potrebbe avere limite $+\infty$ a sinistra.

iii) la derivata f' ha un punto di massimo locale.

Vediamo innanzitutto che f' non può essere limitata inferiormente su $[\frac{1}{2}, 1[$. Se lo fosse, ossia se $f'(x) \geq c$ per ogni $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, allora, per tali $x \in [\frac{1}{2}, 1[$,

$$f(x) = f(\tfrac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(t)\,dt \geq f(\tfrac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} c\,dt = f(\tfrac{1}{2}) + c\Big(x - \tfrac{1}{2}\Big)\,,$$

e ciò contraddice il fatto che il limite a destra è $-\infty$.

Analogamente f' non può essere limitata inferiormente su $]0, \frac{1}{2}]$. Se lo fosse, ossia se $f'(x) \geq c$ per ogni $x \in]0, \frac{1}{2}]$, allora, per tali $x \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\tfrac{1}{2}) + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f'(t)\,dt = f(\tfrac{1}{2}) - \int_{x}^{\frac{1}{2}} f'(t)\,dt \\ &\leq f(\tfrac{1}{2}) - \int_{x}^{\frac{1}{2}} c\,dt = f(\tfrac{1}{2}) - c\Big(\tfrac{1}{2} - x\Big)\,, \end{aligned}$$

e ciò contraddice il fatto che il limite a sinistra è $+\infty$.

Adesso prendiamo un $\gamma < f'(\frac{1}{2})$. Per quanto sopra e per la continuità di f' (essa è derivabile), esistono $a < \frac{1}{2} < b$ tali che $f'(a) = \gamma = f'(b)$. Per il teorema di Weierstrass, f' ristretta a $[a,b]$ ha massimo. Se $\xi \in [a,b]$ è un punto di massimo, deve essere $\xi \in]a,b[$. Abbiamo così trovato un punto di massimo locale di f' in $]0,1[$.

iv) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.

Per il teorema di Fermat, $(f')'(\xi) = 0$.

Esercizio 4. Il primo:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{3\tan x}}{2(\sin^2 x - 1)}\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{3\tan x}}{\cos^2 x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^3 e^t \frac{1}{3}\,dt \\ &= -\frac{1}{6}\int_0^3 e^t\,dt \\ &= -\frac{1}{6}[e^t]_0^3 \\ &= -\frac{1}{6}(e^3-1)\,.\end{aligned}$$

(Abbiamo operato la sostituzione $t = 3\tan x$.)

Il secondo:

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{3} (|x^2-1|-1)\,x^2\,dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} ((x^2-1)-1)\,x^2\,dx + \int_{-1}^{1} ((1-x^2)-1)\,x^2\,dx + \int_{1}^{3} ((x^2-1)-1)\,x^2\,dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^4-2x^2)\,dx + \int_{-1}^{1} (-x^4)\,dx + \int_{1}^{3} (x^4-2x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} \\ &= \left(-\frac{1}{5} + 2\,\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{32}{5} + 2\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{243}{5} - 2\,\frac{27}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - 2\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{161}{5}\,.\end{aligned}$$