Tutorato Analisi 1 M-Z
Esercitazione 2 - 23/10/2023

Clemente Romano

23 ottobre 2023

1. Dimostrare la continuità delle seguenti funzioni utilizzando la definizione ϵ-δ :
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = |x + 2|$
   (d) $f(x) = 49$

2. Sia $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà:
$$\exists L > 0\ :\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
   dimostrare che f è continua.

3. Dimostrare che la norma euclidea
$$\|\cdot\|\ :\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
   è una funzione continua

4. Sia $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua che non è mai uguale a 0, si mostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$f(x) \cdot f(y) > 0$$

5. Si dimostri che esiste un $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $\xi > 0$ e $\xi^2 = 2$ usando il teorema degli zeri e la funzione $f(x) = x^2 - 2$

6. Mostrare un esempio di una funzione $f\ :\ ]0, 1] \to \mathbb{R}$ continua ma illimitata, e di una funzione $f\ :\ [0, \infty[\to \mathbb{R}$ continua ma illimitata.

7. Si mostri un esempio di una funzione continua $f\ :\ [-2, -1] \cup [1, 2] \to \mathbb{R}$ tale che $f(-2) < 0$ e $f(2) > 0$ con $f(x) \neq 0$ per ogni x nel dominio, questo contraddice il teorema degli zeri?

8. Sia $g(x) = f(x) + x^3$ dove f è la funzione dell'esercizio 2, si dimostri che $g(x)$ ammette almeno uno 0.

I prossimi sono esercizi bonus, quindi potrebbero risultare particolarmente difficili

9. Un caso particolare della disuguaglianza media geometrica media aritmetica è la seguente disuguaglianza
$$2xy \leq x^2 + y^2$$
valida per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, la si dimostri usando $(x - y)^2 \geq 0$. Stabilita questa disuguaglianza la si applichi per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$, con
$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$
prima con $i = 1$ e poi con $i = 2$.

10. Sia f la funzione dell'esercizio 2, si dimostri che $f(1) = f(0)$ (senza usare le derivate!)

Email: clemente.romano@sissa.it