# Tutorato Analisi 1 M-Z
# Soluzioni esercitazione 6

Clemente Romano

20 novembre 2023

1. Determinare l'insieme in cui sono definite le seguenti funzioni

   i)
$$\sqrt{\log_{1/2}\left(\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right)\right)}$$

   ii)
$$\arctan\left(\sqrt{\frac{|x^2-2|+1}{x^2-1}}\right)$$

Soluzione :

i) Devo imporre tre condizioni :

Prima condizione : $x - 4 \neq 0$
l'insieme dei $x$ che soddisfano la condizione è $\{x \neq 4\}$, cioè $]-\infty, 4[\cup]4, \infty[$

Si osservi che questa condizione verrà imposta in seguito "en passant".

Seconda condizione : Impongo che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo, cioè

$$\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right) > 0$$

osserviamo che $0 = \arctan(0)$, quindi la disuguaglianza diventa

$$\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right) > \arctan(0)$$

e usando il fatto che l'arcotangete è una funzione (strettamente ) crescente la disuguaglianza è equivalente alla seguente

$$\frac{x-\pi}{x-4} > 0$$

questa è una semplice disequazione fratta, la soluzione si ottiene facendo il cosidetto "prodotto dei segni" ed è l'insieme
$]-\infty, \pi[\cup]4, \infty[$

Si osservi che questo insieme è contenuto nell'insieme ottenuto imponendo la condizione 1, abbiamo riottenuto la stessa condizione "en passant".

Terza condizione :
impongo che l'argomento della radice sia non negativo, cioè

$$\log_{1/2}\left(\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right)\right) \geq 0$$

considero la funzione $h(x) = \exp_{1/2}(x) = (1/2)^x$, è una funzione strettamente decrescente pertanto si ha $b \geq a \iff h(b) < h(a)$, applicando questa proposizione alla disuguaglianza precedente (e usando il fatto che $h(0) = 0$) otteniamo la disuguaglianza equivalente

$$\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right) \leq 1$$

osserviamo che $0 < 4 < 2\pi$, quindi dividendo per 4 otteniamo $0 < 1 < \pi/2$, quindi dato che $1 \in ]-\pi/2, \pi/2[$ si ha che $1 = \arctan(\tan(1))$, la disuguaglianza diventa :
$\arctan\left(\frac{x-\pi}{x-4}\right) \leq \arctan(\tan(1))$
e usando di nuovo il fatto che l'arcotangente è una funzione crescente questa è equivalente a

$$(\frac{x-\pi}{x-4}) \leq \tan(1)$$

adesso portando tutto su un'unica frazione otteniamo

$$\frac{(\tan(1)-1)x-(4-\pi)}{x-4} \geq 0$$

di nuovo devo fare il "prodotto dei segni", tuttavia devo prima capire quale numero è più grande tra le soluzioni delle equazioni che ottengo imponendo che il denominatore sia uguale a 0 e che il numeratore sia uguale a 0, chiaramente uno di questi è 4, mentre per quanto riguarda l'altro risolvo esplicitamente l'equazione

$$\begin{aligned} &(\tan(1)-1)x-(4-\pi)=0 \\ &(\tan(1)-1)x = 4-\pi \\ &x = \frac{4-\pi}{\tan(1)-1} \end{aligned} \tag{1}$$

questo numero è più grande di 4, per dimostrarlo innanzitutto osserviamo che $\tan(1)-1>0$, infatti

$$\pi < 4 < 2\pi \implies \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2} \implies \tan(\frac{\pi}{4}) < \tan(1)$$

e a questo punto basta osservare che $1 = \tan(\pi/4)$, si può procedere in questo modo

$$\pi < 4 \implies -\pi > -4 \implies 4\tan(1)-\pi > 4\tan(1)-4 \implies \frac{4\tan(1)-\pi}{\tan(1)-1} > \frac{4\tan(1)-4}{\tan(1)-1} = 4$$

quindi abbiamo che le soluzioni della disuguaglianza sono

$$\Big]-\infty, 4\Big[\bigcup\Big[\frac{4\tan(1)-\pi}{\tan(1)-1}, +\infty\Big[$$

Soluzione finale :
Chiaramente devono essere soddisfatte tutte e tre le soluzioni, l'insieme delle soluzioni sarà quindi l'intersezione dei tre insiemi che ho ottenuto, ma grazie al fatto che la prima condizione è già "inclusa" nella seconda si può prendere l'intersezione del secondo e del terzo insieme, cioè l'insieme

$$\left(\Big]-\infty, 4\Big[\bigcup\Big[\frac{4\tan(1)-\pi}{\tan(1)-1}, +\infty\Big[\right) \cap \Big(]-\infty, \pi[\cup]4, \infty[\Big)$$

osserviamo che grazie a quanto è stato detto prima

$$\pi < 4 < \frac{4\tan(1)-\pi}{\tan(1)-1}$$

pertanto l'intersezione degli insiemi è l'insieme

$$\Big]-\infty, \pi\Big[\bigcup\Big[\frac{4\tan(1)-\pi}{\tan(1)-1}, +\infty\Big[$$

**Email: clemente.romano@sissa.it**

ii) Questo esercizio è più facile, devo imporre soltanto che l'argomento della radice sia non negativo, cioè

$$\frac{|x^2-2|+1}{x^2-1} \geq 0$$

osserviamo che il numeratore è sempre positivo, questo in quanto il valore assoluto è non negativo e quindi
$|x^2-2|+1 \geq 1 > 0$, pertanto è sufficiente porre il denominatore maggiore di 0, cioè
$x^2-1>0$
questa è una semplice disuguaglianza di secondo grado, si può risolvere per esempio fattorizzando $x^2-1=(x-1)(x+1)$, in ogni caso l'insieme delle soluzioni è

$$]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$$

2. Stabilire se i seguenti limiti (alcuni dei quali tratti da vecchi temi d'esame) esistono e, in caso affermativo, calcolarne il risultato.

i)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{30}-x^{29}}{x^{31}-x^{30}-x^{29}-x^7}$$

ii)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14}-x^{13}}{\sqrt{((x^2-x)^3-x^5)^5-x^{29}}-x^{14}}$$

Soluzione :

Il principio euristico generale è che quando $x\to+\infty$ sono solo le potenze di grado maggiore che contano, cioè è possibile sostituire i polinomi del tipo

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

con il semplice monomio[1] $a_nx^n$, tuttavia bisogna sempre fare attenzione quando si applica questi principi, vederemo come giustificarne l'applicazione nel dettaglio

i) Applicando il principio otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{30}-x^{29}}{x^{31}-x^{30}-x^{29}-x^7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{30}}{x^{31}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

ed in effetti il risultato è corretto e di semplice giustificazione, è sufficiente raccogliere al numeratore e al denominatore il termine di grado massimo, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{30}-x^{29}}{x^{31}-x^{30}-x^{29}-x^7} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{30}(1-\frac{1}{x})}{x^{31}(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^{24}})}$$

A questo punto è sufficiente usare il teorema sul limite del prodotto e ricaviamo

$$= \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{30}}{x^{31}}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^{24}})}\right)$$

Il limite a sinistra fa chiaramente 0 in quanto $x^{30}/x^{31}=1/x$, invece il limite a destra fa 1 [2]

ii) Cominciamo risolvendo l'esercizio usando il principio euristico, per non scrivere cose false come $x^{14}-x^{13}=x^{14}$ userò al posto dell'uguale il simbolo $\sim$

al numeratore abbiamo $x^{14}-x^{13}\sim x^{14}$, mentre per quanto riguarda il denominatore analizziamo un pezzo alla volta.

[1] ovviamente si sottintende che $a_n \neq 0$
[2] praticamente è possibile sostituire 0 al posto di $\frac{1}{x}$ e si ottiene 1

**Email: clemente.romano@sissa.it**

$x^2 - x \sim x^2$, quindi $(x^2-x)^3 \sim (x^2)^3 = x^6$, ma quindi $(x^2-x)^3 - x^5 \sim x^6 - x^5 \sim x^6$, ma quindi $((x^2-x)^3 - x^5)^5 - x^{29} \sim (x^6)^5 - x^{29} = x^{30} - x^{29} \sim x^{30}$
quindi $\sqrt{((x^2-x)^3-x^5)^5 - x^{29}} - x^{14} \sim \sqrt{x^{30}} - x^{14} \sim x^{15} - x^{14} \sim x^{15}$.

Sostituendo nel limite si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14} - x^{13}}{\sqrt{((x^2-x)^3-x^5)^5 - x^{29}} - x^{14}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14}}{x^{15}} = 0$$

cerchiamo di giustificare tutto rigorosamente, l'idea è sempre la stessa, raccogliere $x^{14}$ al numeratore e $x^{15}$ al denominatore, cerchiamo di occuparci della radice, dato che siamo sotto radice dovremo raccogliere $x^{30}$ nell'argomento della radice.

Useremo la formula $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ valida in particolare quando $n \in \mathbb{N}$ (così non dobbiamo preoccuparci dei segni), più nello specifico si ha la formula seguente

$$a^m b^n = (a^{m/n} b)^n \tag{2}$$

per raccogliere $x^{30}$ nell'argomento della radice dobbiamo moltiplicare l'argomento della radice per $x^{-30}$, facciamolo :

$$x^{-30}\big[((x^2-x)^3-x^5)^5 - x^{29}\big] = x^{-30}((x^2-x)^3-x^5)^5 - \frac{1}{x}$$

portiamo $x^{-30}$ dentro la parentesi usando la formula 2 con $n = 5$ e $m = -30$, ottenendo

$$x^{-30}\big[(x^2-x)^3-x^5\big]^5 - \frac{1}{x} = \big[x^{-6}((x^2-x)^3-x^5)\big]^5 - \frac{1}{x} = \big[x^{-6}(x^2-x)^3 - \frac{1}{x}\big]^5 - \frac{1}{x}$$

adesso usiamo di nuovo la 2 ma cin $n = 3$ e $m = -6$, ottenendo

$$\big[x^{-6}(x^2-x)^3 - \frac{1}{x}\big]^5 - \frac{1}{x} = \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}\right)^5 - \frac{1}{x}$$

quindi in definitiva abbiamo dimostrato che

$$x^{-30}\big[((x^2-x)^3-x^5)^5 - x^{29}\big] = \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}\right)^5 - \frac{1}{x}$$

ma adesso moltiplicando di nuovo per $x^{30}$ ambo i membri otteniamo finalmente la fattorizzazione cercata

$$\big[((x^2-x)^3-x^5)^5 - x^{29}\big] = x^{30}\left[\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}\right)^5 - \frac{1}{x}\right] \tag{3}$$

osserviamo che il membro di destra tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$ quindi in particolare da un certo punto in poi è positivo, quindi non dobbiamo preoccuparci del segno dell'argomento della radice
usando la 3 e raccogliendo $x^{14}$ al numeratore otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14} - x^{13}}{\sqrt{((x^2-x)^3-x^5)^5 - x^{29}} - x^{14}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^{30}\left[\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}\right)^5 - \frac{1}{x}\right]} - x^{14}}$$

portando $x^{30}$ fuori dalla radice (praticamente usiamo la 2 con $m = 15$, $n = 1/2$) ricaviamo

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{15}\sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x}\right)^5} - \frac{1}{x} - x^{14}}$$

adesso raccolgo $x^{15}$ al denominatore e ottengo finalmente

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{15}\left[\sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{x}\right)^5-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\right]}$$

adesso uso il teorema sul prodotto dei limiti ed ho

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{14}}{x^{15}}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{x}\right)^5-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}}\right) = 0\cdot 1 = 0$$

**Email: clemente.romano@sissa.it**