# Tutorato Analisi 1 M-Z
# Esercitazione 8 - 4/12/2023

Clemente Romano

4 dicembre 2023

1. Stabilire se i seguenti limiti (alcuni dei quali tratti da vecchi temi d'esame) esistono e, in caso affermativo, calcolarne il risultato.

   i) 24/1/2023
   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin^2(x)}{1-x}\right)^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

   ii) 14/6/2022
   $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(3+\cos(x))}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3^x-4^x}{x} \qquad \cancel{\lim_{x\to 0}\frac{x+(x+1)\ln(1-x)}{x^2}} \qquad \lim_{x\to+\infty} x(x-\sqrt{x^2+1})$$

2. Dimostrare che per ogni $\theta\in\mathbb{R}$ si ha
$$3-4\cos(\theta)+2\cos(2\theta)\geq 0$$

3. Studiare la funzione $x^x$ e determinarne
   (a) dominio di definizione
   (b) limiti agli estremi del dominio
   (c) derivata
   (d) intervalli di monotonia
   (e) stabilire se la funzione ammette punti di massimo e/o minimo globali e determinarli

4. Stabilire se i seguenti limiti esistono e, in caso affermativo, calcolarne il risultato.

   i)
   $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3-8x^2-18x-9}$$

   ii)
   $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x}+6x$$

   iii)
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{x}$$
   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\ln(1+x)))}{x}$$

   iv)
   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\pi}{2}+\arctan(x)}{\sqrt{\cos(\frac{1}{x})}-1}$$

**I prossimi sono esercizi bonus, quindi potrebbero risultare particolarmente difficili**

Relazioni del tipo $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ vengono chiamate "equivalenze asintotiche" e sono particolarmente utili nel calcolo dei limiti, quando vale questa relazione si scrive $f\sim g$ (dando per scontato a cosa tende $x$ !!!). Spesso quando $f\sim g$ si può sostituire $g$ al posto di $f$ all'interno di un limite senza alterare il risultato, tuttavia questo non è sempre vero! si ricordi dell'esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-\cos(x)}{x^2}\neq\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

**5.** [1] Siano $f, g, h$ tre funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

dimostra che

$$\lim_{x\to 0} f(x)h(x) = \lim_{x\to 0} g(x)h(x)$$

**6.** [2] Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, siano $f_1, f_2, g_1, g_2, u_1, u_2, v_1, v_2$ funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)}{v_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_2(x)}{v_2(x)} = 1$$

dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)f_2(x)}{u_1(x)u_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{v_1(x)v_2(x)}$$

**7.** sia $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, sia $U$ un aperto in $\tilde{\mathbb{R}}$ contenente $x_0$, siano $m, n > 0$ e $f_1, f_2, \ldots, f_m, g_1, g_2, \ldots, g_m, u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_m$ funzioni da $U \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = 1 = \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)}{v_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_2(x)}{v_2(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{u_m(x)}{v_m(x)}$$

Dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)f_2(x)\cdot \cdots \cdot f_n(x)}{u_1(x)u_2(x)\cdot \cdots \cdot u_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)\cdot \cdots \cdot g_n(x)}{v_1(x)v_2(x)\cdot \cdots \cdot v_m(x)}$$

[1] cosa succede se $g(x) = 0$ per qualche $x$?
[2] cosa succede se (per esempio) $v_1(x) = 0$ per qualche $x$?

**Email: clemente.romano@sissa.it**