Soluzione Esercizi Bonus

Tutorato Analisi 1 M-Z

Clemente Romano

4 dicembre 2023

Questo documento contiene le soluzioni di tutti gli esercizi Bonus appartenenti a tracce antecedenti al 4/12/2023.

0.1 Esercitazione 1 - 16/10/2023

1. Sia (E, d) uno spazio metrico, sia $\delta > 0$ e sia $A \subseteq E$, si definisce

$$I_\delta(A) := \bigcup_{x \in A} B(x, \delta)$$

Si dimostri che $A \subseteq I_\delta(A)$ e che $I_\delta(A)$ è un insieme aperto [a]

[a] hint : è vero che $x \in B(x, \delta)$? L'unione di insiemi aperti è un insieme aperto?

Soluzione

le palle aperte $B(x, \delta)$ sono insiemi aperti, quindi $I_\delta(A)$ è aperto in quanto è unione di insiemi aperti.

dimostrare che $A \subseteq I_\delta(A)$ è equivalente a dimostrare

$$y \in A \implies y \in I_\delta(A)$$

ma se $y \in A$ allora $y \in B(y, \delta)$ e dato che la palla $B(y, \delta)$ compare nell'unione che definisce $I_\delta(A)$ si ha $y \in I_\delta(A)$

2. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi tali che:

$$\forall a \in A \; \exists b \in B \; : \; a \leq b \quad , \quad \forall b \in B \; \exists a \in A \; : \; a \leq b$$

Dimostrare che

$$\inf(A) \leq \inf(B) \quad , \quad \sup(A) \leq \sup(B)$$

Soluzione :

comincio dimostrando che $\inf(A) \leq \inf(B)$

come si definisce $\inf(B)$? un minorante di B è un numero $\beta \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $b \in B$ si ha $\beta \leq b$, $\inf(B)$ è per definizione il massimo dell'insieme dei minoranti di B, allora per mostrare che $\inf(A) \leq \inf(B)$ è sufficiente mostrare che $\inf(A)$ è un minorante di B, in quanto se $\inf(A)$ è un minorante di B sarà di sicuro minore o uguale del massimo dei minoranti di B, cioè $\inf(B)$.

Devo quindi mostrare che

$$b \in B \implies \inf(A) \leq b$$

tuttavia ho che

$$b \in B \implies \exists a \in A \; : \; a \leq b \implies \inf(A) \leq a \leq b \implies \inf(A) \leq b$$

per dimostrare l'altra disuguaglianza si ragiona in modo simile

continuiamo dimostrando che $\sup(A) \leq \sup(B)$

come si definisce $\sup(A)$? un maggiorante di A è un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in A$ si ha $\alpha \geq a$, $\sup(A)$ è per definizione il minimo dell'insieme dei maggioranti di A, allora per mostrare che

$\sup(A) \leq \sup(B)$ è sufficiente mostrare che $\sup(B)$ è un maggiorante di A, in quanto se $\sup(B)$ è un maggiorante di A sarà di sicuro maggiore o uguale del minimo dei maggioranti di A, cioè $\sup(A)$ devo quindi mostrare che

$$a \in A \implies a \leq \sup(B)$$

tuttavia ho che

$$a \in A \implies \exists b \in B \ : \ a \leq b \implies a \leq b \leq \sup(B) \implies a \leq \sup(B)$$

3. Sia (E, d) uno spazio metrico, sia $A \subseteq E$, sia $x \in E$, si definisce

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\}$$

Dimostrare che[a]

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \qquad \forall x, y \in E$$

da ciò si deduca che

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

e si deduca che $f(x) = d(x, A)$ è una funzione continua.

[a]hint : la disuguaglianza triangolare implica che $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, a questo punto si usi il risultato dell'esercizio 10

Soluzione :

è necessario un lemma

Se $F \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme (non vuoto e inferiormente limitato), $c \in \mathbb{R}$ e S è l'insieme

$$S = \{c + f \ : \ f \in F\}$$

allora si ha

$$\inf(S) = c + \inf(F)$$

seguiamo l'hint e usiamo quindi la disuguaglianza triangolare

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \tag{1}$$

adesso usando il lemma e il risultato dell'esercizio 10, prendendo l'inf ambo i membri ricaviamo

$$\inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\} \leq \inf\{d(x, y) + d(y, a) \ : \ a \in A\} = d(x, y) + \inf\{d(y, a) \ : \ a \in A\}$$

usando la definizione di $d(x, A)$ questa diventa

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

sottraiamo $d(y, A)$ ambo i membri e ricaviamo

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

adesso per ottenere la disuguaglianza è sufficiente ripetere i passaggi dell'esercizio 1, quindi ricavia-mo

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

per dimostrare la continuità di $f(x) := d(x, A)$ è sufficiente porre $\delta = \epsilon$ nella definizione di continuità

0.2 Esercitazione 2 - 23/10/2023

4. Un caso particolare della disuguaglianza media geometrica media aritmetica è la seguente disuguaglianza

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

valida per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, la si dimostri usando $(x-y)^2 \geq 0$. Stabilita questa disuguaglianza la si applichi per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$, con

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

prima con $i = 1$ e poi con $i = 2$.

Soluzione :

abbiamo chiaramente che $0 \leq (x-y)^2$, sviluppando il quadrato questa diventa $0 \leq x^2 - 2xy + y^2$, sommando $2xy$ ambo i membri diventa

$$2xy \leq x^2 + y^2 \tag{2}$$

usando la disuguaglianza con gli x e gli y indicati nella traccia otteniamo le disuguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{2x_1y_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} &\leq \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2} \\ \frac{2x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} &\leq \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{3}$$

sommando membro a membro le due disuguaglianze otteniamo

$$\frac{2(x_1y_1 + x_2y_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1^2 + y_2^2} = 1 + 1 = 2 \tag{4}$$

dividendo ambo i membri per 2 otteniamo

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq 1 \tag{5}$$

adesso moltiplichiamo ambo i membri per $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ e ricaviamo finalmente

$$x_1y_1 + x_2y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \tag{6}$$

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà:

$$\exists L > 0 \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

dimostrare che $f(0) = f(1)$ senza usare le derivate.

Soluzione :

prima di risolvere l'esercizio mostriamo che utilizzando le derivate è molto semplice, osserviamo che

$$-L|x-y| \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq L|x-y|$$

quindi facendo tendere $y \to 0$ e usando il teorema dei carabinieri si ricava

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0$$

quindi la derivata di f si annulla in tutti i punti e quindi f è costante.

Dimostriamo adesso che f è costante senza usare le derivate, dobbiamo dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ $f(a) = f(b)$, per semplicità di notazione ci limitiamo al caso $a = 0$ e $b = 1$.

Usando l'ipotesi e la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|f(1) - f(0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} L\frac{1}{n^2} = \frac{L}{n}$$

abbiamo quindi

$$0 \leq |f(1) - f(0)| \leq \frac{L}{n}$$

facciamo tendere $n \to \infty$ e usando il teorema dei carabinieri ricaviamo

$$|f(1) - f(0)| = 0$$

cioè $f(1) = f(0)$

0.3 Esercitazione 3 - 30/10/2023

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ se } x \text{ è irrazionale} \\ f(p/q) = 1/|q| \text{ se } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e sono coprimi} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e non è continua in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Soluzione :

cominciamo dimostrando che f non è continua in x_0 se $x_0 \in \mathbb{Q}/ \setminus \{0\}$,

sia $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dimostriamo che f non è continua in x_0 dimostrando che la definizione $\epsilon - \delta$ non è soddisfatta.

Innanzitutto $f(x_0) > 0$, possiamo quindi prendere $\epsilon < f(x_0)$.

Sia $\delta > 0$, allora esiste $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ irrazionale, quindi per definizione

$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0)| > \epsilon$

quindi f non può essere continua in x_0 perché δ è un numero qualsiasi.

sia $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora $f(x_0) = 0$.

dimostriamo che f è continua in x_0 usando la definizione $\epsilon - \delta$.

Sia $\epsilon > 0$, grazie alla proprietà archimedea dei numeri reali posso trovare $q \in \mathbb{N}$ tale che $1/q < \epsilon$.

consideriamo $Q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot q = q!$

adesso prendiamo un numero reale positivo (a caso), prendo 1, consideriamo l'intervallo $]x_0 - 1, x_0 + 1[$, questo intervallo contiene soltanto un numero finito di numeri della forma p/Q, con $p \in \mathbb{Z}$, diciamo che questi sono

$$\{\frac{p_1}{Q}, \frac{p_2}{Q}, \dots, \frac{p_n}{Q}\}$$

, allora posso porre

$$\delta := \min\left\{|x_0 - \frac{p_i}{Q}| \ : \ i = 1, 2, \dots, n\right\}$$

osserviamo che $\delta < 1$.

sia adesso $|x - x_0| < \delta$,

se x è irrazionale allora $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$

se x è razionale allora se $x = a/b$ con a, b coprimi e $b > q$ abbiamo che $|f(x) - f(x_0)| = 1/b < \epsilon$, altrimenti

$b < q$ mi dice che $a/b = (a \cdot Q/b)/(Q)$, e $|x - x_0| < \delta$ ci dice che $x = p_i/Q$ per qualche i, ma questo non è possibile perche $|x - x_0| < \delta < |x - p_i/Q| = |x - x_0|$

7. Dimostrare che $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione continua se e solo se per ogni $y \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ l'insieme $\{y - \epsilon < f < y + \epsilon\} = \{x \in E : y - \epsilon < f(x) < y + \epsilon\}$ è un insieme aperto.[a]

[a] hint : l'implicazione $\implies$ si ottiene dall'esercizio 3, è quindi sufficiente dimostrare $\impliedby$

Soluzione :

cominciamo dimostrando $\implies$, assumiamo che f sia continua.

Sia $x_0 \in \{y - \epsilon < f < y + \epsilon\}$, vogliamo dimostrare che x_0 è un punto interno.

innanzitutto l'insieme $]y - \epsilon, y + \epsilon[$ è aperto, e dato che $f(x)$ ci appartiene esisterà un $\xi > 0$ tale che $]f(x) - \xi, f(x) + \xi[\subset]y - \epsilon, y + \epsilon[$.

A questo punto la definizione di continuità mi dice che esiste un $\delta > 0$ tale che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \xi$, ma quindi $f(x) \in]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[\subset]y - \epsilon, y + \epsilon[$

abbiamo cioè che se $d(x, x_0) < \delta$ allora $x \in \{y - \epsilon < f < y + \epsilon\}$, questo ci dice che x_0 è un punto interno e quindi $\{y - \epsilon < f < y + \epsilon\}$ è un insieme aperto.

Adesso dimostriamo $\impliedby$, sia $x_0 \in E$, dimostro che f è continua in x_0 usando la definizione $\epsilon - \delta$.

Sia $\epsilon > 0$. pongo $y = f(x_0)$, allora per ipotesi l'insieme $\{x \in E : y - \epsilon < f(x) < y + \epsilon\}$ è aperto e chiaramente x_0 gli appartiene, pertanto esiste un $\delta > 0$ tale che

$$B(x_0, \delta) \subset \{x \in E : y - \epsilon < f(x) < y + \epsilon\}$$

ovvero si ha che

$$d(x, x_0) < \delta \implies f(x) \in]y - \epsilon, y + \epsilon[$$

ovvero si ha che

$$d(x, x_0) < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \epsilon$$

e questo dimostra che f è continua in x_0

0.4 Esercitazione 6 - 6/11/2023

8. Dimostrare le seguenti formule :

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2 \qquad \forall x > 0$$

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\pi/2 \qquad \forall x < 0$$

Soluzione :

Sia $f(x) := \arctan(x) + \arctan(1/x)$

osserviamo che il dominio della funzione è $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Usando le derivate

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

quindi dato che la derivata di f è identicamente nulla si ha che f è costante nell'intervallo $]0,\infty[$ e nell'intervallo $]-\infty,0[$

$f(1) = 2\arctan(1) = \pi/2$, quindi nell'intervallo $]0,\infty[$ f è costantemente uguale a $f(1) = \pi/2$.

$f(-1) = 2\arctan(-1) = -\pi/2$, quindi nell'intervallo $]-\infty,0[$ f è costantemente uguale a $f(-1) = -\pi/2$.

9. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^m}-1}{x} = \frac{m}{n}$$

Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

Soluzione :

Avevamo già dimostrato che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+t}-1}{t} = \frac{1}{n}$$

, ponendo $t = (1+x)^m - 1$ ricaviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^m}-1}{(1+x)^m-1} = \frac{1}{n}$$

Inoltre grazie al teorema del binomio di Newton si ha

$(1+x)^m - 1 = mx + \binom{m}{2}x^2 + \dots$ dove $\dots$ sono termini di grado superiore a 2, quindi chiaramente per $x \to 0$ contano solo i termini di grado più basso e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x} = m$$

usando questi due risultati si ottiene facilmente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^m}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{(1+x)^m}-1}{(1+x)^m-1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m-1}{x} = \frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$$

0.5 Esercitazione 8 - 4/12/2023

Relazioni del tipo $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ vengono chiamate "equivalenze asintotiche" e sono particolarmente utili nel calcolo dei limiti, quando vale questa relazione si scrive $f \sim g$ (dando per scontato a cosa tende x !!!). Spesso quando $f \sim g$ si può sostituire g al posto di f all'interno di un limite senza alterare il risultato, tuttavia questo non è sempre vero! si ricordi dell'esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)}{x^2} \neq \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

10. [a] Siano f, g, h tre funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

dimostra che

$$\lim_{x\to 0} f(x)h(x) = \lim_{x\to 0} g(x)h(x)$$

[a] cosa succede se $g(x) = 0$ per qualche x?

Soluzione :

Basta usare il Teorema sul limite del prodotto e l'ipotesi :

Soluzioni esercizi bonus

$$\lim_{x\to 0} f(x)h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 1 \cdot \lim_{x\to 0} g(x)h(x) = \lim_{x\to 0} g(x)h(x)$$

11. [a] Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, siano $f_1, f_2, g_1, g_2, u_1, u_2, v_1, v_2$ funzioni da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)}{v_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_2(x)}{v_2(x)} = 1$$

dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)f_2(x)}{u_1(x)u_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{v_1(x)v_2(x)}$$

[a] cosa succede se (per esempio) $v_1(x) = 0$ per qualche x?

Soluzione :

Moralmente è uguale al caso precedente, basta usare il Teorema sul limite del prodotto e l'ipotesi :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)f_2(x)}{u_1(x)u_1(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \cdot \frac{g_1(x)g_2(x)}{u_1(x)u_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{u_1(x)u_2(x)} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{u_1(x)u_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{u_1(x)u_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{v_1(x)}{u_1(x)} \cdot \frac{v_2(x)}{u_2(x)} \cdot \frac{g_1(x)g_2(x)}{v_1(x)v_2(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{v_1(x)}{u_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{v_2(x)}{u_2(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{v_1(x)v_2(x)} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{v_1(x)v_2(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)}{v_1(x)v_2(x)}
\end{aligned}$$

I passaggi possono sembrare complicati ma in realtà non si è fatto altro che dividere e moltiplicare

12. sia $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, sia U un aperto in $\tilde{\mathbb{R}}$ contenente x_0, siano $m, n > 0$ e $f_1, f_2, \ldots, f_m, g_1, g_2, \ldots, g_m, u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_m$ funzioni da $U \setminus \{x_0\}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = 1 = \lim_{x\to x_0} \frac{u_1(x)}{v_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{u_2(x)}{v_2(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{u_m(x)}{v_m(x)}$$

Dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)f_2(x)\cdot \cdots \cdot f_n(x)}{u_1(x)u_2(x)\cdot \cdots \cdot u_m(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)\cdot \cdots \cdot g_n(x)}{v_1(x)v_2(x)\cdot \cdots \cdot v_m(x)}$$

Soluzione :

Di nuovo è praticamente uguale a prima, dobbiamo soltanto dividere e moltiplicare $n+m$ volte, per semplificare le notazioni introduco la notazione di produttoria

se a_i sono dei numeri reali, si definisce induttivamente

$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1$, $\prod_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}$

quindi in pratica si ha

$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)f_2(x)\cdot \cdots \cdot f_n(x)}{u_1(x)u_2(x)\cdot \cdots \cdot u_m(x)} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{j=1}^{n} f_j(x)}{\prod_{i=1}^{m} u_i(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{j=1}^{n} g_j(x)}{\prod_{i=1}^{m} v_i(x)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{f_j(x)}{g_j(x)} \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{v_i(x)}{u_i(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{j=1}^{n} g_j(x)}{\prod_{i=1}^{m} v_i(x)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \lim_{x\to x_0} \frac{f_j(x)}{g_j(x)} \cdot \prod_{i=1}^{m} \lim_{x\to x_0} \frac{v_i(x)}{u_i(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{j=1}^{n} g_j(x)}{\prod_{i=1}^{m} v_i(x)} \cdot \prod_{j=1}^{n} 1 \cdot \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1} = \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{j=1}^{n} g_j(x)}{\prod_{i=1}^{m} v_i(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x)g_2(x)\cdot \cdots \cdot g_n(x)}{v_1(x)v_2(x)\cdot \cdots \cdot v_m(x)}
\end{aligned}$$