Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 1

Riccardo Berforini D'Aquino

9 Ottobre 2023

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(iv) $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(v) $2^n \geq n+1$

(vi) $3^n \geq n^2+1$

(vii) $\displaystyle Se \;\; s_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \;\; allora \;\; s_{2^n} > \frac{n}{2}$

$(viii)$ $\displaystyle Se \;\; -1 < a < 0 \;\; allora \;\; (1+a)^n \leq 1 + na + \frac{n^2a^2}{2}$

Esercizio 2. Dimostrare che i seguenti insiemi hanno la stessa cardinalità:

1) L'insieme dei numeri naturali
2) L'insieme dei numeri interi
3) L'insieme dei numeri razionali
4) L'insieme dei numeri naturali dispari
5) $\{3^n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 3. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, consideriamo il numero complesso

$$z(\alpha) = cos(\alpha) + isen(\alpha) = (cos(\alpha), sen(\alpha)).$$

(i) Dimostrare che $|z(\alpha)| = 1$.
(ii) Dimostrare che $\frac{1}{z(\alpha)} = z^*(\alpha)$ dove z^* è il *complesso coniugato* di z.
(iii) Dimostrare che dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z(\alpha)z(\beta) = z(\alpha + \beta)$
(iv) Dimostrare per induzione che $[cos(\theta) + isen(\theta)]^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$
(v) Sapendo che per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, dimostrare per induzione che per ogni $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$, $|z_1 ... z_n| = |z_1| ... |z_n|$.
(vi) Trovare le n soluzioni complesse dell'equazione algebrica $z^n - 1 = 0$.
Suggerimento: dopo aver dimostrato che necessariamente z ha modulo 1, provare che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $z = z(\alpha)$. Dopo di che sostituire nell'equazione e utilizzare (iii) per ottenere una semplice equazione trigonometrica. Infine classificare le soluzioni ottenute, eliminando quelle ripetute.

Esercizio 4. Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi:

(i) $$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k \,:\, k = 0, 1, 2, ... \right\}$$

(ii) $$\{3^k \,:\, k = 1, 2, 3, ...\}$$

(iii) $$\left\{ \frac{1 - 7n}{n + 1} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(iv) $$\left\{ \frac{5n}{n^2 + 9} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(v) $$\left\{ \frac{n + m}{2} - \sqrt{nm} \,:\, n, m \in \mathbb{N} \right\}$$