

**Esercizio:** Dimostrare per induzione che per ogni  $n \geq 1$ ,  $3^{2^n} - 1$  è un multiplo di  $2^{n+2}$ .

**Soluzione:** Osserviamo che per  $n = 1$  abbiamo

$$3^{2^1} - 1 = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 2^3.$$

Ora per l'ipotesi induttiva possiamo supporre

$$3^{2^n} - 1 = k \cdot 2^{n+2}$$

con  $k \in \mathbb{N}$  e otteniamo

$$\begin{aligned} 3^{2^{n+1}} - 1 &= (3^{2^n})^2 - 1 = (3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1) = k \cdot 2^{n+2} \cdot (3^{2^n} + 1) = \\ &= k_1 \cdot 2^{n+3} \end{aligned}$$

per una opportuna  $k_1 \in \mathbb{N}$  siccome  $3^{2^n} + 1$  è un numero pari.