Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 2

Riccardo Berforini D'Aquino

16 Ottobre 2023

Esercizio 1. Consideriamo su $\mathbb{R}^N$ la norma euclidea $||\cdot||$. Dimostrare che $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\Big| ||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}|| \Big| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

Suggerimento: scrivere $\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ e applicare la disuguaglianza triangolare.

Esercizio 2. Consideriamo su $\mathbb{R}^N$ le tre distanze

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^2}$$

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_k - y_k| : k = 1, 2, ..., N\}.$$

Dimostrare che

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq N \cdot d_\infty.$$

Indichiamo con $B^1(x_0, r)$ la palla di centro x_0 e raggio r nella distanza d_1, con $B^2(x_0, r)$ la palla di centro x_0 e raggio r nella distanza d_2 e con $B^\infty(x_0, r)$ la palla di centro x_0 e raggio r nella distanza d_∞.
Dimostrare che

$$B^\infty(x_0, \frac{r}{N}) \subseteq B^1(x_0, r) \subseteq B^2(x_0, r) \subseteq B^\infty(x_0, r).$$

Esercizio 3. Dimostrare che

$$A_n = \{x^n : x \in \mathbb{Q}\}$$

è denso in $\mathbb{R}$ se e solo se n è dispari.

Esercizio 4. Trovare punti interni, punti esterni, punti di frontiera, punti di accumulazione, punti di aderenza, e punti isolati dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$(i)\ \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

$(ii)\ \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y < 1 - |x|\}$

$(iii)\ \ \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + 2y^2 = 6\}$

$(iv)\ \ \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B\left((-n, n), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Esercizio 5. Consideriamo gli intervalli aperti $]a, b[$ e $]c, d[$ con $a < b$ e $c < d$.
1) Dimostrare che

$$]a, b[\cap]c, d[$$

è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$.
2) Dimostrare che l'unione, anche infinita, di intervalli aperti è un aperto.
3) Dimostrare, fornendo un controesempio, che invece l'intersezione *numerabile* di intervalli aperti non è detto che sia un aperto.
4) Dimostrare che l'intersezione, anche infinita, di intervalli chiusi è un chiuso.
5) Dimostrare, fornendo un controesempio, che l'unione *numerabile* di intervalli chiusi non è detto che sia un chiuso.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme aperto.
1) Dimostrare che $f^{-1}(A)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$.
2) Dimostrare che $f(A)$ non è detto che sia un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$.