TUTORATO 2

EX 1: $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$. DATO $\underline{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\|\underline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$

(i) $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N$ (OVVIO)

$\|\underline{x}\| = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i \iff \underline{x} = \underline{0}$

(ii) $\|\alpha \underline{x}\| = \left(\sum_{i=1}^N (\alpha x_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha^2 x_i^2\right)^{1/2} = \left(\alpha^2 \sum_{i=1}^N x_i^2\right)^{1/2} = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$: SI RICORDI CHE, PER LA DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ,

$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$. PERTANTO

$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle + 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \leq \|\underline{x}\|^2 + 2\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| + \|\underline{y}\|^2 = (\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|)^2$

PER DIMOSTRARE CHE $\big| \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\| \big| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|$, SCRIVIAMO

$\|\underline{x}\| = \|\underline{y} + (\underline{x} - \underline{y})\| \leq \|\underline{y}\| + \|\underline{x} - \underline{y}\| \implies \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|$

ALLO STESSO MODO $\|\underline{y}\| - \|\underline{x}\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\| \implies \big| \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\| \big| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|$.

EX 2: $d_1(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|$, $d_2(\underline{x}, \underline{y}) = \left(\sum_{k=1}^N (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$, $d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) = \max\{|x_k - y_k|, k = 1, \dots, N\}$.

(a) $d_\infty \leq d_2$: INFATTI, ELEVANDO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO:

$d_\infty(\underline{x}, \underline{y})^2 = \max\{|x_k - y_k|^2, k = 1, \dots, N\}$, MENTRE

QUA PRENDO SOLO IL PIÙ GRANDE

$d_2(\underline{x}, \underline{y})^2 = \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^2 \quad \leftarrow$ QUA LI STO SOMMANDO TUTTI

(b) $d_2 \leq d_1$: INFATTI, ELEVANDO ENTRAMBI I MEMBRI AL QUADRATO:

$d_2(\underline{x}, \underline{y})^2 = \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^2$

$d_1(\underline{x}, \underline{y})^2 = \left(\sum_{k=1}^N |x_k - y_k|\right)^2 = \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^2 + \overbrace{2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - y_i| \cdot |x_j - y_j|}^{\geq 0}$

(c) $d_1 \leq N \cdot d_\infty$: INFATTI d_1 È SOMMA DI N TERMINI

MENTRE $N \cdot d_\infty$ È N VOLTE IL PIÙ GRANDE DI ESSI.

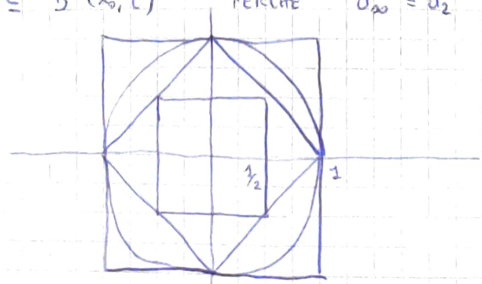
(d) $B^\infty(x_0, \frac{r}{N}) \subseteq B^1(x_0, r)$: DEVO FAR VEDERE CHE OGNI PUNTO DI $B^\infty(x_0, \frac{r}{N})$ STA ANCHE IN $B^1(x_0, r)$. PRENDIAMO $x \in B^\infty(x_0, \frac{r}{N}) \implies d_\infty(x, x_0) < \frac{r}{N} \implies N \cdot d_\infty(x, x_0) < r$

E PER IL PUNTO (c), $d_1(x, x_0) \leq N \cdot d_\infty(x, x_0) < r \implies d_1(x, x_0) < r \implies x \in B^1(x_0, r)$.

(e) $B^1(x_0, r) \subseteq B^2(x_0, r)$ PERCHÉ $d_2 \leq d_1$ (ESATTAMENTE COME AL PUNTO PRECEDENTE)

(f) $B^2(x_0, r) \subseteq B^\infty(x_0, r)$ PERCHÉ $d_\infty \leq d_2$

IN $\mathbb{R}^2$:



EX 3: SE $n \geq 1$ È PARI, ALLORA $\{x^n : x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ NON È DENSO.

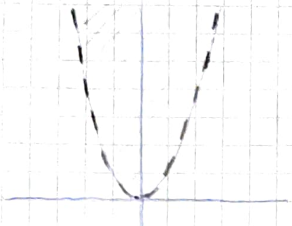
SE INVECE n È DISPARI, COMUNQUE PRESO $\bar{y} \in \mathbb{R}$ ESISTE $y \in \mathbb{R}$ TALE CHE $\bar{y} = y^n$ (QUESTO PERCHÈ LA FUNZIONE $x \mapsto x^n$ È BIETTIVA). POICHÈ $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in \mathbb{Q}$ TALE CHE $|x-y| < \varepsilon$. MA ALLORA

$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k (-y)^{n-k}\right)$. SICCOME $|y| < \frac{M}{2}$, POSSIAMO SUPPORRE $|x|, |y| < M$

$\Rightarrow |x^n - y^n| \leq |x-y| \sum_{k=0}^{n} |x|^k |y|^{n-k} \leq |x-y| \, n \cdot M^n \leq C \cdot \varepsilon$ CON $C > 0$.

EX 4: (i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$



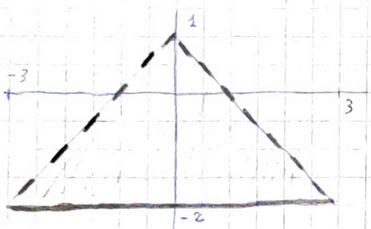
PUNTI INTERNI: $\{(x,y) : y > x^2\}$

PUNTI ESTERNI: $\{(x,y) : y < x^2\}$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE: $\{(x,y) : y \geq x^2\}$ (ANCHE ADERENZA)

PUNTI ISOLATI: $\emptyset$

(ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y < 1 - |x|\}$



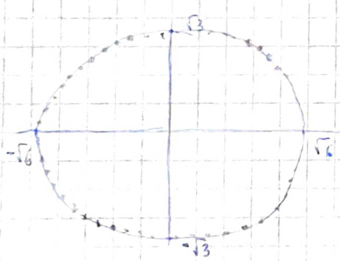
PUNTI INTERNI: $\{(x,y) : -2 < y < 1 - |x|\}$

PUNTI ESTERNI: $\{(x,y) : y < -2\} \cup \{(x,y) : y > -2 \text{ E } y > 1 - |x|\}$

PUNTI DI ACCUMULAZIONE/ADERENZA: $\{(x,y) : -2 \leq y \leq 1 - |x|\}$

PUNTI ISOLATI: $\emptyset$

(iii) $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + 2y^2 = 6\}$ $\qquad x^2 + 2y^2 = 6 \iff \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$



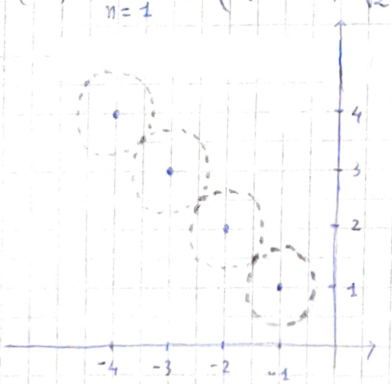
PUNTI INTERNI: $\emptyset$

PUNTI ESTERNI: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \neq 6\}$

ACCUMULAZIONE/ADERENZA: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 6\}$

PUNTI ISOLATI: $\emptyset$

(iv) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B\left((-n,n), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



PUNTI INTERNI: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B\left((-n,n), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

PUNTI ESTERNI: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),(-n,n)) > \frac{1}{\sqrt{2}} \ \forall n \geq 1\}$

ADERENZA: $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B\left((-n,n), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

PUNTI ISOLATI: $\emptyset$

EX 5   1) SE $b \leq c$, ALLORA $]a,b[\cap]c,d[= \emptyset$ CHE E' APERTO.

SE $a \geq d$, ALLORA $]a,b[\cap]c,d[= \emptyset$.

SE $a \leq c$ E $b \geq d$, ALLORA $]a,b[\cap]c,d[=]c,d[$

SE $c \leq a$ E $d \geq b$, ALLORA $]a,b[\cap]c,d[=]a,b[$

SE $a \leq c$ E $c < b \leq d$, ALLORA $]a,b[\cap]c,d[=]c,b[$

SE $c \leq a < d$ E $b \geq d$, ALLORA $]a,b[\cap]c,d[=]a,d[$.

2) SIA $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE DI INTERVALLI APERTI $I_n =]a_n, b_n[$ CON $a_n < b_n$.

SE $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, ALLORA ESISTE $\bar{n} \in \mathbb{N}$ TALE CHE $x \in I_{\bar{n}} =]a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}}[$.

POICHE' QUEST'ULTIMO E' UN INTERVALLO APERTO, $\exists\, r > 0 : B(x,r) \subseteq I_{\bar{n}}$. MA ALLORA $x \in B(x,r) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

3) $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ CHE E' CHIUSO

4) PER DIMOSTRARE CHE UN INSIEME E E' CHIUSO, BASTA FAR VEDERE CHE IL SUO COMPLEMENTARE $\complement E$ E' APERTO. SIA $(\bar{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ UNA SUCCESSIONE DI INTERVALLI CHIUSI $\bar{I}_n = [a_n, b_n]$ CON $a_n < b_n$.

$$\complement \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{I}_n \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{LEGGI} \\ \text{DI DE MORGAN}}}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \complement \bar{I}_n$$

CHE E' UNIONE NUMERABILE DI SEMIRETTE APERTE, CHE SONO UNIONE NUMERABILE DI INTERVALLI APERTI.

5) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, 1 - \frac{1}{2^n}] = [0,1)$

EX 6   1) SIA $x_0 \in f^{-1}(A)$, ALLORA $\exists\, y_0 \in A$ TALE CHE $f(x_0) = y_0$.

LA FUNZIONE f E' CONTINUA IN x_0. CIO' SIGNIFICA CHE $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(y_0, \varepsilon)$. POICHE' A E' APERTO, $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : B(y_0, \varepsilon_0) \subseteq A$. DATO QUESTO ε_0, $\exists\, \delta_0 > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta_0) \Rightarrow f(x) \in B(y_0, \varepsilon_0)$.

NE CONSEGUE CHE $\forall x \in B(x_0, \delta_0)$, $f(x) \in A$, OVVERO $x_0 \in B(x_0, \delta_0) \subseteq f^{-1}(A)$.

SI PUO' DIMOSTRARE ANCHE IL VICEVERSA, OVVERO CHE $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ E' CONTINUA $\iff \forall A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO, $f^{-1}(A)$ E' APERTO.

"$\Rightarrow$" L'ABBIAMO GIA' DIMOSTRATA.

"$\Leftarrow$": PRENDIAMO $x_0 \in \mathbb{R}$ E $y_0 = f(x_0)$. VOGLIAMO FAR VEDERE CHE $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B(x_0, \delta)$, $f(x) \in B(y_0, \varepsilon)$.

MA $B(y_0, \varepsilon)$ E' APERTO IN $\mathbb{R}$, QUINDI $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ E' APERTO E $x_0 \in f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$.

ALLORA $\exists \delta > 0 : x_0 \in B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$

$\Rightarrow f(x) \in B(y_0, \varepsilon) \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$.

2) SIA $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$

$f((-1,1)) = [0,1)$ CHE NON E' APERTO