

Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 3

Riccardo Berforini D'Aquino

23 Ottobre 2023

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

1) Dimostrare che f è continua se e solo se $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f^{-1}(A)$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R} .

2) Dimostrare che, $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, non è detto che $f(A)$ sia un sottoinsieme aperto di \mathbb{R} .

Esercizio 2. Dimostrare che le seguenti funzioni sono continue su tutto il loro dominio:

1) $f(x) = x$

2) $f(x) = x^5$

3) $f(x) = 7 - 3|x|$

4) $f(x) = \text{sen}(x)$

5) $f(x) = \sqrt{x}$

Esercizio 3. Dimostrare che la norma euclidea

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$$

è una funzione continua.

Esercizio 4. Sia E uno spazio metrico e siano $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue.

1) Dimostrare che $f + g$ è una funzione continua.

2) Dimostrare che, se $g(x) \neq 0 \forall x \in E$, allora $\frac{f}{g}$ è una funzione continua.

Esercizio 5. Siano $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni così definite:

$$f(x) = x^2 - x$$

$$g(x) = 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } g(x) = 0 \text{ altrimenti.}$$

Dimostrare che $f \circ g$ è una funzione continua.

Esercizio 6. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dimostrare che f è continua.

Esercizio 7. Sia $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ una funzione continua. Dimostrare che esiste $x \in [-1, 1]$ tale che $f(x) = x$.
Suggerimento: si consideri $g(x) = f(x) - x$ e si applichi il teorema degli zeri.