Proposizione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^5$. Allora f è una funzione continua.

Dimostrazione 1. Fissiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che f è continua in questo punto. Dall'arbitrarietà della scelta di questo punto seguirà la continuità in tutti i punti della retta reale $\mathbb{R}$.
Occorre dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0 : \quad se \;\; |x - x_0| < \delta \;\; allora \;\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Si osservi che il δ dipende da x_0, ovvero il numero reale che abbiamo precedentemente fissato, e da ϵ, un parametro *arbitrariamente* piccolo. Iniziamo osservando che, mediante semplici manipolazioni algebriche e la disuguaglianza triangolare del valore assoluto,

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^5 - x_0^5| =^{1} |(x - x_0)(x^4 + x^3 x_0 + x^2 x_0^2 + x x_0^3 + x_0^4)| \leq$$

$$\leq |x - x_0| \cdot (|x|^4 + |x|^3|x_0| + |x|^2|x_0|^2 + |x||x_0|^3 + |x_0|^5).$$

A questo punto osserviamo che, poiché x_0 è un numero reale fissato, esiste $M > 0$ tale che $|x_0| < M < 2M$. Siccome stiamo cercando un δ piccolo per il quale valga la definizione di continuità, non è restrittivo supporre $\delta < M$. Siccome stiamo assumendo $|x - x_0| < \delta$, per la disugualianza triangolare inversa abbiamo $|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < \delta$ e quindi $|x| < |x_0| + \delta < 2M$. Sostituendo quindi il fatto che $|x| < 2M$ e $|x_0| < 2M$ otteniamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 5 \cdot (2M)^4 \cdot |x - x_0| < \epsilon$$

a patto di prendere

$$|x - x_0| < \delta = \frac{\epsilon}{5 \cdot (2M)^4}.$$

Come osservato in classe, invece che assumere $\delta < M$, non è restrittivo assumere $\delta < \frac{M - |x_0|}{2}$. In questo modo otteniamo $|x| < |x_0| + \delta < M$. Sostituendo quindi il fatto che $|x| < M$ e $|x_0| < M$ otteniamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 5 \cdot M^4 \cdot |x - x_0| < \epsilon$$

a patto di prendere

$$|x - x_0| < \delta = \frac{\epsilon}{5 \cdot M^4}.$$

Ancora, non è restrittivo assumere $\delta < 1$. La ragione per cui possiamo assumere di volta in volta che il δ stia al di sotto di una certa soglia è che, se la definizione di continuità vale per un certo $\overline{\delta}$, allora varrà anche per tutti i δ più piccoli. Assumendo $|x - x_0| < \delta < 1$, abbiamo $|x| < |x_0| + 1$ (sempre per la disuguaglianza

[1] Per la formula a pag. 3 delle dispense (quella scritta in classe conteneva due segni errati, che però non compromettono la validità della dimostrazione visto che siamo interessati ai valori assoluti).

triangolare inversa dimostrata nel precedente tutorato). Sostituendo quindi il fatto che $|x| < |x_0| + 1$ e $|x_0| < |x_0| + 1$ otteniamo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 5 \cdot (|x_0| + 1)^4 \cdot |x - x_0| < \epsilon$$

a patto di prendere

$$|x - x_0| < \delta = \frac{\epsilon}{5 \cdot (|x_0| + 1)^4}.$$

Dimostrazione 2. (suggerita da un compagno) Volendo dimostrare che

$$x_0^5 - \epsilon < x^5 < x_0^5 + \epsilon$$

a patto che

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

eleviamo alla quinta tutti i membri della seconda relazione (le disuguaglianze vengono preservate perché $f(x) = x^5$ è una funzione crescente su tutto $\mathbb{R}$), ottenendo

$$(x_0 - \delta)^5 < x^5 < (x_0 + \delta)^5.$$

Infine imponiamo che

$$x_0^5 - \epsilon < (x_0 - \delta)^5 < x^5 < (x_0 + \delta)^5 < x_0^5 + \epsilon.$$

Per ottenere questo dobbiamo imporre

$$\delta < (x_0^5 + \epsilon)^{\frac{1}{5}} - x_0$$

e

$$\delta < x_0 - (x_0^5 - \epsilon)^{\frac{1}{5}}.$$

Sarà sufficiente prendere il minimo tra i due.