Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 4

Riccardo Berforini D'Aquino

30 Ottobre 2023

Esercizio 1. Per ogni $k \geq 1$ si consideri

$$A_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2 - \frac{1}{k} \right\}.$$

Indicato con

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

si determino i punti interni, i punti isolati e i punti di accumulazione di A.

Esercizio 1 (variante 2). Per ogni $k \geq 1$ si consideri

$$A_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 + (-1)^k \left(1 - \frac{1}{k} \right) \right\}.$$

Indicato con

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$$

si determino i punti interni, i punti isolati e i punti di accumulazione di A.

Esercizio 2. Per ogni $n \geq 1$ si consideri

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)||_\infty = max\{|x|, |y|\} = \frac{3n}{n+4} \right\}.$$

Indicato con

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

si determino i punti interni, i punti isolati e i punti di accumulazione di A.

Esercizio 3. Dimostrare che le seguenti funzioni sono strettamente monotone e invertibili (se restringiamo l'insieme immagine al solo codominio), nel loro rispettivo dominio. Dedurne che si tratta di funzioni continue, e calcolare le rispettive funzioni inverse.

1) $f(x) = x^3$

2) $f(x) = \sqrt{x}$

3) $f(x) = tan(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}, \quad con \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}, \quad con \quad x > -1$

5) $f(x) = 2^x$

6) $f(x) = log_{10}(x)$

Esercizio 4. Sia

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \ continua\}.$$

Si dimostri che

$$d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

è una distanza indotta dalla norma

$$||f|| = sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}.$$

Esercizio 5. Si dimostri che, data una successione di intervalli chiusi e limitati $I_n = [a_n, b_n]$ con $a_n \leq b_n$ tali che

$$(i) \quad I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0, \exists \, \bar{n} : |I_{\bar{n}}| = b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}} < \epsilon$$

allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\bar{x}\}.$$

Esercizio 6 (difficile). Si utilizzi il risultato dell'esercizio precedente per dimostrare che ogni insieme non vuoto $E \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette un estremo superiore.

Suggerimento: si osservi che è possibile considerare un numero reale a_0 che non sia un maggiorante per E e un numero reale b_0 che sia un maggiorante per E. Si consideri dunque $I_0 = [a_0, b_0]$. A questo punto si dimezzi via via l'intervallo, scegliendo opportunamente quale metà prendere. Dopo aver verificato di aver costruito una successione di intervalli che soddisfi le ipotesi dell'esercizio 5, si verifichi che l'*unico* punto contenuto nell'intersezione è effettivamente l'estremo superiore di E.