Teorema (corollario del teorema di Cantor sugli intervalli inscatolati). Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e superiormente limitato. Allora E ammette estremo superiore.

Dimostrazione. Poiché E è non vuoto, esiste $a_0 \in \mathbb{R}$ che non sia un maggiorante per E. Poiché E è superiormente limitato, esiste un maggiorante $b_0 \in \mathbb{R}$ per E. Sia $I_0 = [a_0, b_0]$ il primo intervallo. Consideriamo il punto centrale di I_0, ovvero

$$c_0 = \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Distinguiamo ora i seguenti due casi:
(i) Se c_0 è un maggiorante per E, allora indichiamo con $b_1 = c_0$ e $a_1 = a_0$ e il secondo intervallo della nostra successione sarà $I_1 = [a_1, b_1]$.
(ii) Se c_0 non è un maggiorante per E, allora indichiamo con $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$ e il secondo intervallo della nostra successione sarà $I_1 = [a_1, b_1]$.
Consideriamo adesso il punto centrale di I_1, ovvero

$$c_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

Ancora abbiamo i seguenti due casi:
(i) Se c_1 è un maggiorante per E, allora indichiamo con $b_2 = c_1$ e $a_2 = a_1$ e il secondo intervallo della nostra successione sarà $I_2 = [a_2, b_2]$.
(ii) Se c_1 non è un maggiorante per E, allora indichiamo con $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$ e il secondo intervallo della nostra successione sarà $I_2 = [a_2, b_2]$.

Ripetendo questo procedimento otteniamo una successione $(I_n = [a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ di intervalli chiusi, limitati e inscatolati,

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$$

con a_n che non è un maggiorante di E per nessun $n \in \mathbb{N}$ e b_n che è un maggiorante per E per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre l'ampiezza di questi intervalli dimezza ad ogni passo. In altre parole

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, n_\epsilon \in \mathbb{N} : |I_{n_\epsilon}| = b_{n_\epsilon} - a_{n_\epsilon} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n_\epsilon}} < \epsilon$$

perché basta prendere

$$n_\epsilon > \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right).$$

Pertanto per il teorema di Cantor (esercizio 5 del tutorato del 30/10/2023) abbiamo che

$$\{L\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Rimane da dimostrare che L è l'estremo superiore di E, ovvero che:
(i) $L \geq x \;\; \forall x \in E$.

(ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists\, x_\epsilon \in E$ tale che $x_\epsilon > L - \epsilon$.

Per dimostrare (i) supponiamo per assurdo che L non sia un maggiorante per E, ovvero che esista $x_0 \in E$ tale che $x_0 > L$. Sia

$$\epsilon_0 = x_0 - L.$$

A questo ϵ_0 corrisponde un n_{ϵ_0} tale che $|I_{n_{\epsilon_0}}| < \epsilon_0$. Ma noi sappiamo che $L \in I_{n_{\epsilon_0}} = [a_{n_{\epsilon_0}}, b_{n_{\epsilon_0}}]$, quindi $b_{n_{\epsilon_0}} - L < \epsilon_0$ e allora $b_{n_{\epsilon_0}} < x_0$ che contraddice il fatto che $b_{n_{\epsilon_0}}$ è un maggiorante per E.

Per dimostrare (ii) osserviamo che, comunque scelto un $\epsilon_1 > 0$, a questo ϵ_1 corrisponde un n_{ϵ_1} tale che $|I_{n_{\epsilon_1}}| < \epsilon_1$. Ma noi sappiamo che $L \in I_{n_{\epsilon_1}} = [a_{n_{\epsilon_1}}, b_{n_{\epsilon_1}}]$, quindi $a_{n_{\epsilon_1}} > L - \epsilon_1$. Ma $a_{n_{\epsilon_1}}$ non è un maggiorante per E, quindi esiste $x_{\epsilon_1} \in E$ tale che

$$x_{\epsilon_1} \geq a_{n_{\epsilon_1}} > L - \epsilon_1.$$