Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 6

Riccardo Berforini D'Aquino

13 Novembre 2023

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti limiti (alcuni dei quali tratti da vecchi temi d'esame) esistono e, in caso affermativo, calcolarne il risultato.

$$(i) \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 - \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+2}$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\log(x) - x\log(\sqrt{x})}{\sqrt{x\log(x)}}$$

$$(iii) \quad \lim_{x\to+\infty} \sin(x)x$$

$$(iv) \quad \lim_{x\to+\infty} \Big(\sin(x)+2\Big)x$$

$$(v) \quad \lim_{x\to+\infty} e^x - \frac{(x+1)(x+2)}{9+3x^2}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(4x) - e^{-x} \le f(x) \le \cos(4x) + 4 - \frac{4}{\pi}\arctan(x).$$

Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Esercizio 3. Siano E ed F due spazi metrici. Consideriamo $f : A \subseteq E \to F$. Supponiamo che $A = B_1 \cup B_2$, ovvero $\{B_1, B_2\}$ costituisce un ricoprimento di A. Supponiamo inoltre che il punto $x_0 \in E$ sia di accumulazione per A, B_1 e B_2. Indichiamo con $f_{|B_1}$ la funzione f ristretta all'insieme B_1 e con $f_{|B_2}$ la funzione f ristretta all'insieme B_2. Si dimostri che, se esistono

$$\lim_{x\to x_0} f_{|B_1}(x) = L_1, \quad \lim_{x\to x_0} f_{|B_2}(x) = L_2$$

e questi due limiti coincidono, ovvero $L = L_1 = L_2$, allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Esercizio 4. Siano E ed F due spazi metrici. Consideriamo $f : A \subseteq E \to F$. Supponiamo che $A = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$. Supponiamo inoltre che il punto $x_0 \in E$ sia di accumulazione per A, B_1, B_2,...,B_n. Si dimostri che, se esistono

$$\lim_{x \to x_0} f_{|B_1}(x) = L, ..., \lim_{x \to x_0} f_{|B_n}(x) = L,$$

allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Si fornisca un esempio di limite in cui il dominio si può ripartire in infinite restrizioni lungo le quali il limite coincide, e tuttavia il limite globale non esiste. Suggerimento: si considerino alcuni degli esempi proposti nella precedente esercitazione.

Esercizio 5. Si verifichi con la definizione di limite che

$$\lim_{x \to -7} \frac{1 - x}{x + 9} = 4.$$