## ESERCIZIO 1:

(i) $$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x^4+3x^2+2}\cdot\frac{x^2+\sqrt{x^4+3x^2+2}}{x^2+\sqrt{x^4+3x^2+2}} =$$

DI FATTO HO MOLTIPLICATO PER 1, MA IN QUESTO MODO AL NUMERATORE È COMPARSO IL PRODOTTO NOTEVOLE $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-(x^4+3x^2+2)}{x^2+\sqrt{x^4+3x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}\frac{-3-2/x^2}{1+\sqrt{1+3/x^2+2/x^4}} = -\frac{3}{2}$$

(ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\log x - x\log\sqrt{x}}{\sqrt{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\log x-\frac{1}{2}x\log x}{\sqrt{x}\sqrt{\log x}} =$$

HO UTILIZZATO LA PROPRIETÀ DEI LOGARITMI: $\log a^b = b\log a$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\log x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}\sqrt{\log x} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\sqrt{\log x}}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{1-\frac{\sqrt{x}}{2}}_{\to-\infty}\Big) = -\infty$$

(iii) DIMOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty}\sin(x)x$ NON ESISTE TROVANDO DUE RESTRIZIONI LUNGO LE QUALI IL VALORE DEL LIMITE NON COINCIDE. RICORDIAMO CHE $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$ E $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)=-1 \quad \forall k\in\mathbb{Z}$. PERTANTO

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi}}\sin(x)x = \lim_{k\to+\infty}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}_{=1}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}_{\to+\infty} = +\infty,$$ MENTRE

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi}}\sin(x)x = \lim_{k\to+\infty}\underbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)}_{=-1}\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right) = -\infty.$$

(iv) SICCOME $-1\le\sin(x)\le 1 \Rightarrow 1\le\sin(x)+2\le 3$

POICHÉ $x\to+\infty$ POSSIAMO ASSUMERE $x>0$, DUNQUE $(\sin(x)+2)x \geq x$

SICCOME $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \implies \lim_{x\to+\infty}(\sin(x)+2)x=+\infty$.

(v) $$\lim_{x\to+\infty} e^x-\frac{(x+1)(x+2)}{9+3x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^x-\frac{x^2}{x^2}\underbrace{\frac{1+3/x+2/x^2}{3+9/x^2}}_{\to 1/3} = +\infty$$

## ESERCIZIO 2:

PER IL TEOREMA A PAGINA 52 DELLE NOTE (NEL CASO PARTICOLARE $x_0=+\infty$) SAPPIAMO CHE, ESSENDO $f$ CRESCENTE, ESISTE $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. INOLTRE $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sup\{f(x): x\in\mathbb{R}\}$.

QUANDO SAPPIAMO CHE UN LIMITE ESISTE, POSSIAMO CALCOLARE IL SUO VALORE LUNGO UNA RESTRIZIONE A NOI COMODA, IN VIRTÙ DEL FATTO CHE IL VALORE DEL LIMITE LUNGO UNA QUALUNQUE RESTRIZIONE DOVRÀ COINCIDERE CON IL VALORE DEL LIMITE STESSO (TEOREMA A PAGINA 43)

OSSERVIAMO CHE $\cos(4x)=1 \iff 4x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff x=k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. PERTANTO

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x=k\frac{\pi}{2}}}f(x) = \lim_{k\to+\infty}f\left(k\frac{\pi}{2}\right) \underset{\text{PER IPOTESI}}{\geq} \lim_{k\to+\infty}\underbrace{\cos\left(4k\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}-\underbrace{e^{-k\frac{\pi}{2}}}_{\to 0} = 1$$

INOLTRE OSSERVIAMO CHE $\cos(4x) = -1 \iff 4x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff x = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}$. QUINDI

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x=(2k+1)\frac{\pi}{4}}} f(x) = \lim_{k\to+\infty} f\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER IPOTESI}}}{\le} \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\cos((2k+1)\pi)}_{=-1} + 4 - \underbrace{\arctan\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)}_{\to\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $1 \le \lim_{x\to+\infty} f(x) \le 1$ E QUINDI POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3:}}$ PER IPOTESI ABBIAMO CHE: 1) $\lim_{x\to x_0} f_{|B_1}(x) = L$ E 2) $\lim_{x\to x_0} f_{|B_2}(x) = L$.

SCRIVIAMO PER ESTESO QUESTE DUE CONDIZIONI.

1) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_1>0$ TALE CHE SE $x \in (B_1 \cap B^E(x_0,\delta_1)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B^F(L,\varepsilon)$

DOVE CON $B^E(x_0,\delta_1)$ INTENDO LA PALLA NELLO SPAZIO METRICO $(E, d_E)$ DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $\delta_1$.

2) $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta_2>0$ TALE CHE SE $x \in (B_2 \cap B^E(x_0,\delta_2)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B^F(L,\varepsilon)$.

METTENDO INSIEME (1) E (2) ABBIAMO CHE:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ (SIA QUESTO IL MINIMO TRA $\delta_1$ E $\delta_2$) TALE CHE SE $x \in (B_1 \cap B^E(x_0,\delta)) \setminus \{x_0\}$

OPPURE $x \in (B_2 \cap B^E(x_0,\delta)) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in B^F(L,\varepsilon)$.

MA $\left((B_1 \cap B^E(x_0,\delta)) \setminus \{x_0\}\right) \cup \left((B_2 \cap B^E(x_0,\delta)) \setminus \{x_0\}\right) = \left((B_1 \cap B^E(x_0,\delta)) \cup (B_2 \cap B^E(x_0,\delta))\right) \setminus \{x_0\} =$

$= \left((B_1 \cup B_2) \cap B^E(x_0,\delta)\right) \setminus \{x_0\} = (A \cap B^E(x_0,\delta)) \setminus \{x_0\}$.

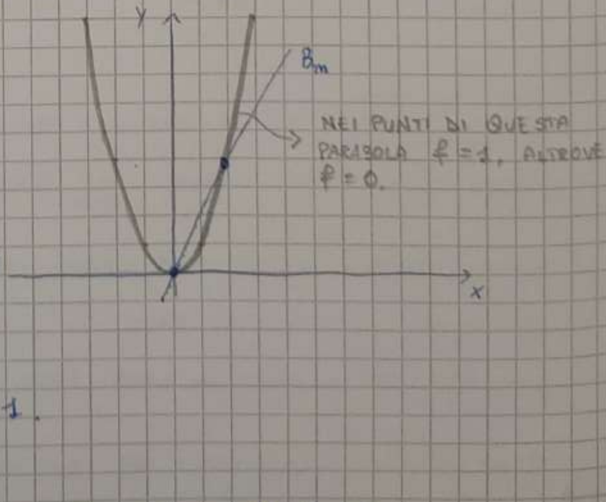
ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE ESISTE $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 4:}}$ LA PRIMA PARTE È DEL TUTTO IDENTICA ALL'ESERCIZIO PRECEDENTE. PER QUANTO RIGUARDA IL CONTROESEMPIO, SI CONSIDERI $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DATA DA

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{SE } y = x^2 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

COSA POSSIAMO DIRE SU $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ?

OSSERVIAMO CHE $\mathbb{R}^2$ SI PUÒ RIPARTIRE NELL'INSIEME DI TUTTE LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE, OVVERO $\mathbb{R}^2 = \underbrace{\{x=0\}}_{B_\infty} \cup \left(\bigcup_{m\in\mathbb{R}} \underbrace{\{y=mx\}}_{B_m}\right)$




CIASCUNA DI QUESTE RETTE INTERSECA LA PARABOLA IN UN SOLO PUNTO (A PARTE (0,0), CHE NON CI INTERESSA AI FINI DEL CALCOLO DEL LIMITE) E QUINDI $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in B_m}} f(x,y) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

TUTTAVIA IL LIMITE NON ESISTE, INFATTI $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} f(x) = 1$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO 5:}}$ VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ TALE CHE SE $x \ne -9$ E $-7-\delta < x < -7+\delta$ (OVVERO $|x+7|<\delta$) $\Rightarrow \left|\frac{1-x}{x+9} - 4\right| < \varepsilon$.

POSSIAMO SUPPORRE SENZA PERDITA DI GENERALITÀ CHE $\delta < 1$ (NE STIAMO CERCANDO UNO, SUFFICIENTEMENTE PICCOLO). QUINDI $-8 < x < -6 \Rightarrow 1 < x+9 = |x+9| < 3$.

MA ALLORA $\left|\frac{1-x}{x+9} - 4\right| = \left|\frac{1-x-4x-36}{x+9}\right| = \left|\frac{-5x-35}{x+9}\right| = 5\,\frac{|x+7|}{x+9} < 5\,|x+7|$ SICCOME $x+9>1$.

E QUINDI $\left|\frac{1-x}{x+9} - 4\right| < \varepsilon$ SE $5\,|x+7| < 5\delta < \varepsilon$, OVVERO SE $\delta < \varepsilon/5$.

IN CONCLUSIONE DOBBIAMO PRENDERE $\delta < \min\{1, \varepsilon/5\}$.