

Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 8

Riccardo Berforini D'Aquino

27 Novembre 2023

Esercizio 1. Stabilire se i seguenti limiti esistono e, in caso affermativo, calcolarne il risultato.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \log \left(\frac{1}{x} \log(2^{\sin(x)}) + e^{\frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{x^2}{e^x - \cos(x)}} \right)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x\sqrt{x})^x - x^{x\sqrt{x}}}{x^{x^2} - (x^2)^x}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x - e^x}{x\sqrt{x}}$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctan(\sqrt{x}))$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\arctan(x^2 + 1)}$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 9)(4 \arctan(x) + 2\pi)$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + x + e^x)(e^{x^3} x^7 - 3)}{\log(e^{x^2} + e^{x^5})}$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{e^x}{\sin(\frac{1}{x^2})}}$$

$$(ix) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}$$

$$(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x-1}}} - 1 \right)$$

$$(xi) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \tan^2(3x))}{e^{\sin^2(5x)} - 1}$$

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x-h) = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Stabilire se f risulta continua.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che esistano $L > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che f è uniformemente continua.

Esercizio 4. Consideriamo $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$ nei loro massimi domini di definizione. Si dimostri che g è uniformemente continua, mentre f non lo è.

Esercizio 5. Sia E uno spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente. Si dimostri che E è completo.