TUTORATO 20/11/23

ESERCIZIO 1: VOGLIAMO FAR VEDERE CHE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0$ TALE CHE SE $x > M$ E $x \neq 3 \Rightarrow \left| \frac{x+2}{x-3} - 1 \right| < \varepsilon$.

SICCOME $x \to +\infty$ POSSIAMO SUPPORRE $M > 3$, QUINDI $\left| \frac{x+2}{x-3} - 1 \right| = \frac{5}{|x-3|} \underset{x > M > 3}{=} \frac{5}{x-3} \underset{x > M}{<} \frac{5}{M-3}$

E $\frac{5}{M-3} < \varepsilon$ SE $M > \frac{5+3\varepsilon}{\varepsilon}$. BASTERÀ QUINDI PRENDERE $M > \max\left\{3, \frac{5+3\varepsilon}{\varepsilon}\right\}$.

ESERCIZIO 2: (i) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{3x-2}{2x+3} - \frac{3x+2}{2x-3}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(3x-2)(2x-3)-(3x+2)(2x+3)}{x(2x+3)(2x-3)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{6x^2-9x-4x+6-6x^2-9x-4x-6}{x(4x^2-9)} = \lim_{x\to 0} \frac{26}{9-4x^2} = \frac{26}{9}$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

ALTRIMENTI $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(1+\frac{x}{2})^{1/2}-1}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ RICORDANDO IL LIMITE NOTEVOLE $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\arccos(x)\right)}{\arcsin(x)} \underset{x=\cos y}{=} \lim_{y\to \frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\arccos(\cos y)\right)}{\arcsin(\cos y)} =$ SICCOME $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$= \lim_{y\to \frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}y\right)}{\frac{\pi}{2}-y} =$ DOVE HO UTILIZZATO IL FATTO CHE $\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \cos(y)$

$z = \frac{\pi}{2} - y$

$= \lim_{z\to 0} \frac{\log\left(1-\frac{2}{\pi}z\right)}{z} = -\frac{2}{\pi}$

(iv) $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x \underset{\text{DIFFERENZA DI QUADRATI}}{=} \lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{-1}\cdot e = 1$ (TEOREMA SUL LIMITE DEL PRODOTTO)

(v) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2}{1-3x^4} \log(e^{x^2}+1) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2}{1-3x^4} \left[\underbrace{\log(e^{x^2})}_{x^2} + \log(1+e^{-x^2})\right] =$ (HO USATO LA FORMULA $\log(ab) = \log a + \log b$)

$= \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\frac{x^4+2x^2}{-3x^4+1}}_{\to -\frac{1}{3}} \left(1 + \underbrace{\frac{\log(1+e^{-x^2})}{x^2}}_{\to 0}\right) = -\frac{1}{3}$

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{\sin(x)}{\tan(x)}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\log(\cos(x)) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\log(1+(\cos(x)-1))}{\cos(x)-1}}_{\to 1 \text{ SICCOME } \cos(x)-1 \to 0} \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

ESERCIZIO 3: (i) $f(x) = \tan(x^3+2)$. LA TANGENTE ESISTE $\Longleftrightarrow$ IL SUO ARGOMENTO È $\neq$ DA $\frac{\pi}{2}+k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$

QUINDI IMPONIAMO $x^3+2 \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \ \forall k\in\mathbb{Z}$ OVVERO $x \neq \sqrt[3]{-2+\frac{\pi}{2}+k\pi} \ \forall k\in\mathbb{Z}$

(ii) $f(x) = \sqrt{4^x - 6\cdot 2^x + 8}$. VOGLIAMO CHE $4^x - 6\cdot 2^x + 8 \geq 0 \underset{2^x = y}{\Longleftrightarrow} y^2 - 6y + 8 \geq 0$

$\Longleftrightarrow (y-2)(y-4) \geq 0 \Longleftrightarrow y \geq 4$ O $y \leq 2$

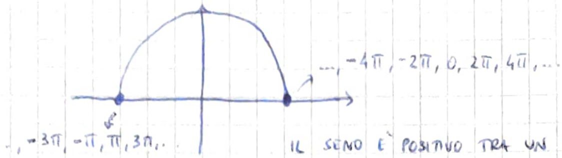
$\Longleftrightarrow 2^x \geq 4$ O $2^x \leq 2 \Longleftrightarrow x \geq 2$ O $x \leq 1$.

(iii) $f(x) = x^{\pi} \Rightarrow \mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (0^0 NON HA SIGNIFICATO E LO STESSO VALE PER LE POTENZE NON INTERE DEI NUMERI NEGATIVI)

(iv) $f(x) = \log(5^x - 19^x)$. VOGLIAMO CHE $5^x - 19^x > 0 \Longleftrightarrow 5^x > 19^x \Longleftrightarrow \left(\frac{19}{5}\right)^x < 1 \Longleftrightarrow x < 0$

(v) $f(x) = \log_{15}(\sin(15x))$. VOGLIAMO CHE $\sin(15x) > 0 \iff 2k\pi < 15x < (2k+1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\iff \frac{2k\pi}{15} < x < \frac{(2k+1)\pi}{15}$.



IL SENO È POSITIVO TRA UN MULTIPLO PARI E UN MULTIPLO DISPARI DI π.

TUTORATO 27/11/23

ESERCIZIO 1: $\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{1}{x}\log\left(2^{\sin(x)}\right) + e^{\frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3}} - \sqrt[3]{\frac{x^2}{e^x-\cos(x)}}\right) =$

$= \lim_{x\to 0} \log\left(\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\log 2 + e^{\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}} - \sqrt[3]{\frac{x}{\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x}}_{\to 0}}}\right) = \log\left(\log 2 + e^{-\frac{1}{2}}\right)$

DOVE POSSIAMO SOSTITUIRE TUTTI I LIMITI PERCHÉ e^x E $\log(x)$ SONO FUNZIONI CONTINUE.

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x\sqrt{x})^x - x^{x\sqrt{x}}}{x^{x^2} - (x^2)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}x} - x^{x^{3/2}}}{x^{x^2} - x^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{3}{2}x\log x} - e^{x^{3/2}\log x}}{e^{x^2\log x} - e^{2x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^{3/2}\log x}}{e^{x^2\log x}} \cdot \frac{e^{(\frac{3}{2}x - x^{3/2})\log x} - 1}{1 - e^{(2x-x^2)\log x}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{(x^{3/2}-x^2)\log x}}_{\to 0} \cdot \frac{e^{(\frac{3}{2}-\sqrt{x})x\log x} - 1}{1 - \underbrace{e^{(2-x)x\log x}}_{\to 0}} = 0$ (GLI ARGOMENTI DEI 3 ESPONENZIALI TENDONO TUTTI A $-\infty$)

(iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x - e^x}{x^{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log x} - e^x}{e^{\sqrt{x}\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log x}}{e^{\sqrt{x}\log x}} \cdot \frac{1 - e^{x - x\log x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\log x}}_{\to +\infty}\left(1 - \underbrace{e^{x(1-\log x)}}_{\to 0}\right) =$

$= +\infty$

(iv) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arctan(\sqrt{x})\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})\right) =$

$\arctan(y) + \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall y > 0$

$= \lim_{x\to+\infty} 2x\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{y\to 0^+} \underbrace{\frac{2}{y}}_{\to+\infty} \underbrace{\frac{\arctan(y)}{y}}_{\to 1} = +\infty$.

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 1/y^2$

(LIMITE NOTEVOLE)

ATTENZIONE NELLA SOSTITUZIONE: $y \to 0^+$ (NON SEMPLICEMENTE 0!)

(v) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\arctan(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\arctan(x^2+1)} \cdot \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{x^2 + x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{x^2 + x\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{1}{\arctan(x^2+1)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\underbrace{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)}_{\to 2}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\arctan(x^2+1)}_{\to \pi/2}} = \frac{1}{\pi}$

(vi) $\lim_{x\to-\infty} (x-9)(4\arctan(x) + 2\pi) = \lim_{x\to-\infty} 4(x-9)\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) \overset{x=-y}{=}$

$= \lim_{y\to+\infty} -4(y+9)\left(\arctan(-y) + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y\to+\infty} -4(y+9)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y)\right) =$

L'ARCOTANGENTE È DISPARI! FORMULA DI PRIMA

$= \lim_{y\to+\infty} -4(y+9)\arctan\left(\frac{1}{y}\right) \overset{z=\frac{1}{y}}{=} \lim_{z\to 0^+} -4\left(\frac{1}{z} + 9\right)\arctan(z) = \lim_{z\to 0^+} -4\underbrace{\frac{\arctan(z)}{z}}_{\to 1} - 36\underbrace{\arctan(z)}_{\to 0} = -4$

(vii) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+x+e^x)(e^{x^3}x^7 - 3)}{\log(e^{x^2} + e^{x^5})} \overset{x=-y}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{(y^2-y+e^{-y})(-e^{-y^3}y^7 - 3)}{\log(e^{+y^2} + e^{-y^5})} =$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2\left(1-\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2e^y}\right)\left(-\frac{y^7}{e^{y^3}}-3\right)}{\underbrace{\log(e^{y^2})}_{= y^2}+\log(1+e^{-y^3-y^2})} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\left(1-\underbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}_{\to 0}+\underbrace{\left(\frac{1}{y^2e^y}\right)}_{\to 0}\right)\left(-\underbrace{\left(\frac{y^7}{e^{y^3}}\right)}_{\to 0}-3\right)}{1+\underbrace{\frac{\log(1+e^{-y^3-y^2})}{y^2}}_{\to 0}} = -3$$

(viii) $$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{e^x}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}} \underset{x=-y}{=} \lim_{y\to+\infty} \sqrt{\frac{e^{-y}}{\sin\left(\frac{1}{y^2}\right)}} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1/y^2}{\sin(1/y^2)}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{y^2}{e^y}\right)}_{\to 0}} = 0$$

(ix) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n\log n}}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\log n - n^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^2\left(-\frac{\log n}{n}+1\right)} = 0$$

(con $-\frac{\log n}{n}+1 \to 1$)

(x) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x-1}}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\frac{e^{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}-1}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(e^{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(e^{\frac{x-x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}}_{\to 1}\;\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

(xi) $$\lim_{x\to0} \frac{\log(1-\tan^2(3x))}{e^{\sin^2(5x)}-1} =$$

$$= \lim_{x\to0} \underbrace{\frac{\log(1-\tan^2(3x))}{-\tan^2(3x)}}_{\to 1}\;\underbrace{\frac{-\tan^2(3x)}{9x^2}}_{= -\left(\frac{\tan(3x)}{3x}\right)^2 \to -1}\;\underbrace{\frac{25x^2}{\sin^2(5x)}}_{= \left(\frac{5x}{\sin(5x)}\right)^2 \to 1}\;\underbrace{\frac{\sin^2(5x)}{e^{\sin^2(5x)}-1}}_{\to 1}\cdot\frac{9}{25} = -\frac{9}{25}$$

ESERCIZIO 2: NO! PRENDIAMO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \neq 0 \\ 0 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

NON È CONTINUA MA IN $x=0$ ABBIAMO $\lim_{h\to0} f(0+h) - f(0-h) = 0$.

ESERCIZIO 3: VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: SE $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

MA $|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|^\alpha < L\delta^\alpha < \varepsilon$

SE PRENDIAMO $\delta = \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{L}}$ CHE NON DIPENDE DA x E y!

ESERCIZIO 4: PRENDIAMO INTANTO $g(x) = \sqrt{x}$. RICORDIAMO CHE $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ $\forall a,b \geq 0$, INFATTI ELEVANDO AL QUADRATO ENTRAMBI I MEMBRI OTTENIAMO $a+b \leq a+b+2\sqrt{ab}$ CHE È VERO.

RICORDANDO CHE $\mathrm{Dom}\, g = [0,+\infty[$, PRENDIAMO $x,y \geq 0$. POSSIAMO SUPPORRE $x \geq y$ (L'ALTRO CASO, VISTO A LEZIONE, È ANALOGO). QUINDI $x = y + x - y$ DOVE $y \geq 0$, $x-y \geq 0$.

ALLORA, PRENDENDO NELLA FORMULA $a = y$ E $b = x-y$ OTTENIAMO $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$

E QUINDI $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$. NEL CASO $x \leq y$ OTTENIAMO $\sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$

NEL COMPLESSO $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ E PER L'ESERCIZIO PRECEDENTE g È UNIFORMEMENTE CONTINUA.

SIA ORA $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x-y|\cdot|x+y| < \delta|x+y|$ SE $|x-y| < \delta$

VOGLIAMO CHE $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ $\forall x,y$ TALI CHE $|x-y| < \delta$ CON δ INDIPENDENTE DA x E y.

MA QUESTO NON È POSSIBILE PERCHÉ SE PRENDIAMO $|x-y| = \frac{\delta}{2}$, ALLORA

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \cdot |x+y| = \frac{\delta}{2} \cdot |x+y| < \varepsilon \iff \delta < \frac{2\varepsilon}{|x+y|}$$ CHE È INDEFINITAMENTE PICCOLO

QUANDO $x, y \to +\infty$.

ESERCIZIO 5: UNO SPAZIO METRICO È COMPLETO SE OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY È CONVERGENTE.

CONSIDERIAMO UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n_1, n_2 \geq \bar{n}, \ d_E(a_{n_1}, a_{n_2}) < \varepsilon$.

PER IPOTESI QUESTA AMMETTE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE: $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ TALE CHE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{k} : \forall k > \bar{k}, \ d_E(a_{n_k}, x_0) < \varepsilon$ PER UN CERTO $x_0 \in E$.

MA ALLORA $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{\bar{n}} : \forall n > \bar{n}, \ d(a_n, x_0) < 2\varepsilon$

INFATTI PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE $d(a_n, x_0) \leq \underbrace{d(a_n, a_{n_k})}_{<\varepsilon \text{ SE } n, n_k > \bar{n}} + \underbrace{d(a_{n_k}, x_0)}_{<\varepsilon \text{ SE PRENDO } k > \bar{k}} < 2\varepsilon$