Tutorato di Analisi 1 - Esercitazione 10

Riccardo Berforini D'Aquino

11 Dicembre 2023

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si dimostri che la derivata di f si annulla infinite volte.
Suggerimento: si applichi il teorema di Rolle.

Esercizio 2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a, b), tale che

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > f(b) > f(a).$$

Dimostrare che esiste $z \in (a, b)$ tale che $f'(z) = 0$.
Suggerimento: si applichi il teorema di Fermat.

Esercizio 3. Siano $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ numeri reali distinti e

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n).$$

Si dimostri che la derivata prima di f si annulla in $n - 1$ punti, la derivata seconda di f si annulla in $n-2$ punti e in generale la derivata k-esima di f, con $0 \leq k \leq n$, si annulla in $n - k$ punti. Si dimostri che

$$f^{(n)}(x) = n! \quad \text{e} \quad f^{(n+1)}(x) = 0.$$

Suggerimento: si applichi il teorema di Rolle.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, con derivata continua, tale che $f(2) = 15$, $f(102) = 25$, $f(602) = 35$. Si dimostri che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \frac{1}{20}$.
Suggerimento: si applichi il teorema di Lagrange.
Bonus: è necessario richiedere che la derivata di f sia continua? (Attenzione: questa parte richiede il teorema di Darboux sui valori intermedi per le derivate).

Esercizio 5. (Esame del 15/09/2023). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari, derivabile tre volte, tale che

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che

(i-ii) Esistono almeno due punti, oltre a 0, in cui la derivata si annulla. Esistono almeno due punti di minimo.
Suggerimento: osserviamo che di $x = 0$ non sappiamo solo che è un punto stazionario, ma anche che tipo di punto stazionario è. Si utilizzi il fatto che f tende a $+\infty$ e il teorema di Rolle per raggiungere la tesi. Grazie alla parità di f è sufficiente studiarla per $x \geq 0$.

(iii-iv) Esistono almeno due punti in cui la derivata seconda si annulla. Esiste almeno un punto in cui la derivata terza si annulla.
Suggerimento: si applichi il teorema di Rolle.

Esercizio 6 (difficile). (Esame del 1/09/2023). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte tale che

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$$

e

$$f'(0) = f'(3) = 1, \quad f'(1) = f'(2) = -1.$$

Dimostrare che:
(i) Esiste almeno un punto in cui la derivata si annulla.
(ii) Esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla.
(iii) Esiste almeno un punto in cui la derivata terza si annulla.
(iv) Esiste almeno un punto in cui la derivata quarta si annulla.
Suggerimento: in questo esercizio è possibile rispondere alle prime tre domande applicando solamente il teorema di Rolle (f si annulla quattro volte, quindi f' si annulla tre volte, f'' si annulla due volte, f''' si annulla una volta). Per poter rispondere anche al quesito (iv) occorre essere cauti fin dall'inizio. In particolare si cerchi di dimostrare che, siccome $f'(1) = f'(2) = -1$, ci sono *due* punti in $(1, 2)$ in cui la derivata prima si annulla.