

Nome e Cognome

Corso di studi Del Santo Fonda

Esercizio 1. (3+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(\log(e - e^x))}{e^x} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (6 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \log x,$$

determinando

i) Dominio: .

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$
e suo segno.

vi) Grafico di f .

Esercizio 3. (4 pt) Si dica, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione:

$$\log x = \beta x.$$

Esercizio 4. (2+2+2+3 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si supponga $f(-1) = f(2) = 0$.

i) Si provi che $f(0) \leq 0$.

ii) Si provi che f ha minimo assoluto.

iii) Si provi che esistono $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

iv) Si provi che se i limiti precedenti non sono 0 allora sono $+\infty$.

Esercizio 5. (4+4 pt) Si calcoli

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos^2 x) \sin x \, dx = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t \arctan t \, dt}{\sin x^3} = \boxed{}.$$