

Nome e Cognome .....

Corso di studi ..... Del Santo  Fonda

---

**Esercizio 1.** (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{(1 - \cos x) \sin^2 x} = \boxed{\phantom{0}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x - \sqrt{x^2 + 1})^x = \boxed{\phantom{0}}.$$

---

**Esercizio 2.** (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \log(x + 1) - \arctan x,$$

determinando

i) Dominio:

ii) Limiti alla frontiera del dominio:

iii) Derivata prima  $f'(x) =$   
e suo segno.

iii) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda  $f''(x) =$

vi) Grafico di  $f$ .

vii) Si determini il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = -1$ .

---

**Esercizio 3.** (2+2+2 pt) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione convessa.

i) Dati  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , con  $x_1 < x_2$ , si provi che, per ogni  $x, \alpha \in \mathbb{R}$ ,  
se  $x > x_2$  e  $\alpha \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  allora  $f(x) \geq f(x_1) + \alpha(x - x_1)$ .

ii) Si supponga che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Si provi che  $f$  è decrescente.

iii) Si supponga che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ . Si provi che se  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq 2$   
allora  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

---

**Esercizio 4.** (4+4 pt) Si calcoli

$$\int_0^\pi (1 + \sin x \cos x)^2 dx = \boxed{\phantom{000}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \frac{\sin t}{t} dt}{x^2} = \boxed{\phantom{000}}.$$