CdS Mat, CdS Fis, Esame di Analisi 1, 14/2/2020 B

Nome e Cognome ....

Corso di studi .... **Del Santo** □ **Fonda** □

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\tan x) - x}{x^3} = \boxed{}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\exp(x^2)}{x^4} - \exp(6x)\right) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \exp\big(\log(x) - 2x\big),$$

determinando

i) Dominio: $\boxed{}$.

ii) Limiti alla frontiera del dominio ed eventuali asintoti.

iii) Derivata prima $f'(x) =$.

iv) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Intervalli dove f è convessa o concava. Eventuali punti di flesso.

vii) Grafico di f.

viii) Si dica, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\exp\big(\log(x) - 2x\big) = \alpha.$$

Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$, e si supponga

$$f'(x) \leq 2 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}\,.$$

Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = 2x^2 - x\,f(x)$. Dimostrare che:

i) $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;

ii) se $f'(0) < 2$, allora $g(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$;

iii) se la retta di equazione $y = 2x$ è un asintoto a $+\infty$ per f, allora

$$g(x) = 0 \text{ per ogni } x \geq 0\,.$$

Esercizio 4. (3+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^1 (x+1)^2 e^x \, dx = \boxed{}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left| x + \frac{\pi}{2} \right| \sin x \, dx = \boxed{}.$$