

Nome e Cognome .....

Corso di studi ..... Del Santo  Fonda

---

**Esercizio 1.** (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tanh x) - x}{x^3} = \boxed{\phantom{000}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\exp(x^2)}{x^6} - \exp(4x) \right) = \boxed{\phantom{000}}.$$

---

**Esercizio 2.** (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \exp(\log(3x) - x),$$

determinando

i) Dominio:

ii) Limiti alla frontiera del dominio ed eventuali asintoti.

iii) Derivata prima  $f'(x) =$   .

iv) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo.

v) Derivata seconda  $f''(x) =$

vi) Intervalli dove  $f$  è convessa o concava. Eventuali punti di flesso.

vii) Grafico di  $f$ .

viii) Si dica, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ , quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\exp(\log(3x) - x) = \alpha.$$

---

**Esercizio 3.** (3+2+2 pt) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile tale che  $f(0) = 0$ , e si supponga

$$f'(x) \geq 2 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(x) = 2x^2 - x f(x)$ . Dimostrare che:

i)  $g(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ;

ii) se  $f'(0) > 2$ , allora  $g(x) < 0$  per ogni  $x \neq 0$ ;

iii) se la retta di equazione  $y = 2x$  è un asintoto a  $+\infty$  per  $f$ , allora

$$g(x) = 0 \text{ per ogni } x \geq 0.$$

**Esercizio 4.** (3+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^1 (x+2)^2 e^x dx = \boxed{\phantom{000}}, \quad \int_{-\pi}^{2\pi} \left| x + \frac{\pi}{2} \right| \cos x dx = \boxed{\phantom{000}}.$$