CdS Fisica, Esame di Analisi Matematica 1, 28/1/2021 A

Nome e Cognome ....

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\tan x = \boxed{\text{-1}}, \qquad \lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{x^2+1}{x}}-e^x) = \boxed{+\infty}.$$

1. Con il cambiamento di variabile $t = x + \frac{\pi}{2}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\tan x &= \lim_{t\to 0}\left(t\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t}{-\tan t}\\ &= -\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{t}}\\ &= -1\,.\end{aligned}$$

2. Mettendo in evidenza,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{x^2+1}{x}}-e^x) &= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\,\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\,,\end{aligned}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t} = 1\,,$$

si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{x^2+1}{x}}-e^x) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty\,.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-2)(x-3)}\,,$$

determinando:

i) Dominio: $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{2,3\} \quad (\text{denominatore} \neq 0)}$.

ii) Limiti importanti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1\,, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$$

iii) Derivata prima $f'(x) = \boxed{-\dfrac{(x-1)(3x-7)}{(x-2)^2(x-3)^2}}$

e suo segno.

$$f'(x)\begin{cases} <0 & \text{se } x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]\tfrac{7}{3},3[\,\cup\,]3,+\infty[\,,\\ >0 & \text{se } x\in\,]1,2[\,\cup\,]2,\tfrac{7}{3}[\,. \end{cases}$$

iv) Intervalli di crescenza e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

$$f(x)\text{ è }\begin{cases} \text{strettamente decrescente su }]-\infty,1]\,\cup\,[\tfrac{7}{3},3[\,\cup\,]3,+\infty[\,,\\ \text{strettamente crescente su }[1,2[\,\cup\,]2,\tfrac{7}{3}]\,. \end{cases}$$

Ha un punto di minimo locale in $x=1$, con valore $f(1)=0$. Ha un punto di massimo locale in $x=\frac{7}{3}$, con valore $f(\frac{7}{3})=-8$.

v) Derivata seconda $f''(x) = \boxed{2\,\dfrac{3x^3-15x^2+21x-5}{(x-2)^3(x-3)^3}}$

vi) Eventuali informazioni sulla concavità/convessità e grafico di f.

Studiamo il numeratore $g(x)=3x^3-15x^2+21x-5$. Vediamo che

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\,,\qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\,,$$

$$g'(x)=9x^2-30x+21=3(x-1)(3x-7)\,,\qquad g''(x)=6(3x-5)\,.$$

Pertanto, $g(x)$ è strettamente crescente su $]-\infty,1]\cup[\frac{7}{3},+\infty[$ e strettamente decrescente su $[1,\frac{7}{3}]$, ha un punto di massimo locale in $x=1$ con valore $g(1)=4$ e un punto di minimo locale in $x=\frac{7}{3}$ con valore $g(\frac{7}{3})=\frac{4}{9}$. Da queste informazioni deduciamo che esiste un unico punto c in cui $g(c)=0$. Essendo $g(0)=-5$, abbiamo che $c\in\,]0,1[$ e

$$g(x)<0\ \text{ se } x<c\,,\qquad g(x)>0\ \text{ se } x>c\,.$$

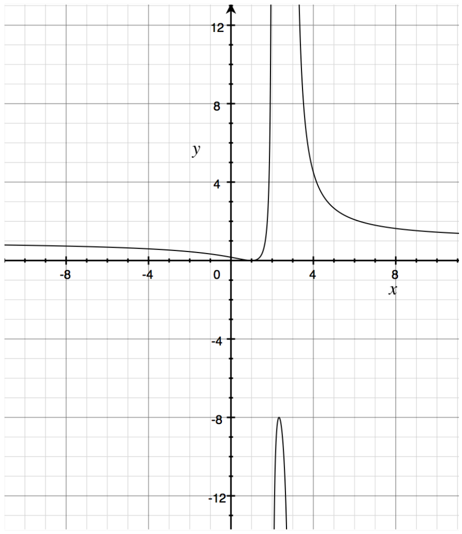
Ne deduciamo che

$$f''(x)\begin{cases} <0 & \text{se } x\in\,]-\infty,c[\,\cup\,]2,3[\,,\\ >0 & \text{se } x\in\,]c,2[\,\cup\,]3,+\infty[\,. \end{cases}$$

e pertanto

$$f(x)\text{ è }\begin{cases} \text{strettamente concava su }]-\infty,c]\cup\,]2,3[\,,\\ \text{strettamente convessa su }[c,2[\,\cup\,]3,+\infty[\,. \end{cases}$$

Abbiamo un punto di flesso in $x=c$. Ecco uno schema del grafico:



Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty\,.$$

Dimostrare che:

i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite troviamo un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$x \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad f'(x) \geq 1\,.$$

Pertanto, se $x > \alpha$,

$$f(x) = f(\alpha) + \int_\alpha^x f'(t)\,dt \geq f(\alpha) + \int_\alpha^x 1\,dt = f(\alpha) + x - \alpha\,.$$

Siccome

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(\alpha) + x - \alpha\big) = +\infty\,,$$

per confronto ne segue che $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\,.$

ii) non esiste alcun asintoto a $+\infty$.

Dimostrazione. Se esistesse un asintoto $y = mx + q$ a $+\infty$, dovrei avere che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}\,.$$

Ma essendo $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$, usando la regola di de l'Hôpital ho che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{1} = +\infty\,,$$

per cui non può esistere un tale asintoto.

iii) se f è derivabile due volte, allora

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt\right)=+\infty\,.$$

Dimostrazione. Sia $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Per il Teorema Fondamentale, $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Sapendo che $\lim_{x\to+\infty}F'(x)=+\infty$, da quanto sopra vedo che anche $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$, e siccome anche $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, usando la regola di de l'Hôpital ho che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{2x}=+\infty\,,$$

avendo già dimostrato che $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=\boxed{-2}\,,\qquad \int_0^\pi x\cos^2 x\,dx=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}\,.$$

1. Per parti:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+c\qquad(c\in\mathbb{R})\,.$$

Quindi, per il Teorema Fondamentale,

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx=\Big[x\sin x+\cos x\Big]_0^\pi=-1-1=-2\,.$$

2. Scrivo $\cos^2 x=\frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ e quindi, per parti,

$$\begin{aligned}\int x\cos^2 x\,dx&=\frac{1}{2}\int x(\cos(2x)+1)\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big(x\big(\tfrac{1}{2}\sin(2x)+x\big)-\int\big(\tfrac{1}{2}\sin(2x)+x\big)\,dx\Big)\\&=\tfrac{1}{4}x\sin(2x)+\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{8}\cos(2x)+c\qquad(c\in\mathbb{R})\,.\end{aligned}$$

Ecco allora che, usando il Teorema Fondamentale,

$$\int_0^\pi x\cos^2 x\,dx=\Big[\tfrac{1}{4}x\sin(2x)+\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{8}\cos(2x)\Big]_0^\pi=\Big(\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{8}\Big)-\frac{1}{8}=\frac{\pi^2}{4}\,.$$