

Nome e Cognome

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 3\pi} (x - 3\pi) \tan\left(\frac{x}{6}\right) = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\frac{x^2+2}{x}} - e^x) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-2)(3-x)},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Limiti importanti:

iii) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

iv) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

v) Derivata seconda $f''(x) =$

vi) Eventuali informazioni sulla concavità/convessità e grafico di f .

Esercizio 3. (3+2+2 pt) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = -\infty.$$

Dimostrare che:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$;

ii) non esiste alcun asintoto a $+\infty$;

iii) se f è derivabile due volte, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x g(t) dt \right) = -\infty.$$

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \boxed{}, \quad \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \boxed{}.$$