

Nome e Cognome

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\ln(1 + \tan(2x))} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - x^{e^2}}{e^x - x^e} = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x + 2},$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Limiti importanti:

iii) Eventuali asintoti:

iv) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$
e suo segno.

vii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

viii) Eventuali simmetrie.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (3+4 pt) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che $f(0) = 0$ e

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0, \\ < 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Dimostrare che:

i) se $m \geq f'(0)$, l'equazione $f(x) = mx$ ha una sola soluzione;

ii) se $m < f'(0)$, l'equazione $f(x) = mx$ ha al più 3 soluzioni.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_{-1}^1 \tan(\sin(x^7)) dx = \boxed{}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx = \boxed{}.$$