Tutorato Analisi 1 M-Z
Soluzioni esercitazione 1

Clemente Romano

16 ottobre 2023

1. Siano $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$, si dimostri la "reverse triangle inequality"[a]

$$|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

si dimostri anche la disuguaglianza seguente (molto simile)

$$|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|$$

[a]hint : si cominci dimostrando che $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$

Soluzione :
prima di dimostrare la disuguaglianza facciamo alcune osservazioni preliminari. Innanzitutto osserviamo che dimostrare una disuguaglianza del tipo $|A| \leq B$ è equivalente a dimostrare le due disuguaglianze $A \leq B$ e $-A \leq B$, in particolare ciò è necessario in quanto $A \leq |A|$ e $-A \leq |A|$, ed è sufficiente (che è quello che ci serve) poiché se $A \leq B$ e $-A \leq B$, allora ricordando che

$$|A| = \begin{cases} +A & \text{se } A \geq 0 \\ -A & \text{se } A \leq 0 \end{cases}$$

si ha che se $A \geq 0$ allora $|A| = +A \leq B$, se invece $A \leq 0$ allora $|A| = -A \leq B$, abbiamo quindi

$$|A| \leq B \iff +A \leq B \;\text{ e }\; -A \leq B \tag{1}$$

[1]

usando la proprietà di omogeneità della norma abbiamo

$$\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$$

sostituendo $\lambda = -1$ ricaviamo

$$\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| \tag{2}$$

fatte queste osservazioni veniamo alla dimostrazione :
la disuguaglianza triangolare ci dice che

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\| \tag{3}$$

sostituendo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$,$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}$ nella 3 ricaviamo

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\| \tag{4}$$

sottraendo $\|\boldsymbol{y}\|$ ambo i membri ricaviamo

$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{5}$$

a questo punto possiamo "scambiare" $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, oppure ripetere i passaggi ponendo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$, in ogni caso ricaviamo

$$\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| \tag{6}$$

adesso osservando che $\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| = -(\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|)$ e che grazie alla 2 $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \|-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dalla 6 ricaviamo

[1]"e" rappresenta la congiunzione logica "and"

Email: clemente.romano@sissa.it

$$-(\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|) \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{7}$$

le due disuguaglianza 5 e 7 insieme all'implicazione $\Longleftarrow$ della 1 forniscono la disuguaglianza cercata

$$|\,\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\,| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{8}$$

dimostriamo adesso l'altra disuguaglianza, la disuguaglianza 8 è valida per ogni $\boldsymbol{x}$ e per ogni $\boldsymbol{y}$, quindi è possibile porre $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{y}$ e ricavare

$$|\,\|\boldsymbol{a}\| - \|\boldsymbol{b}\|\,| = |\,\|\boldsymbol{a}\| - \| - \boldsymbol{b}\|\,| \leq \|\boldsymbol{a} - (-\boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \tag{9}$$

che è l'altra disuguaglianza[2]

2. Si dimostri che, se $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \ldots, \boldsymbol{x_m} \in \mathbb{R}^N$, allora[a]

$$\|\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \leq \|\boldsymbol{x_1}\| + \|\boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_3}\| + \cdots + \|\boldsymbol{x_m}\|$$
$$\|\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \geq \|\boldsymbol{x_1}\| - \|\boldsymbol{x_2}\| - \|\boldsymbol{x_3}\| - \cdots - \|\boldsymbol{x_m}\|$$

Se ne deduca che : se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, allora

$$|p(x)| \geq |a_n||x|^n - |a_{n-1}||x|^{n-1} - \cdots - |a_1||x| - |a_0|$$

[a] hint : si ponga $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}$ e si usi la reverse triangle inequality

Cominciamo dimostrando la prima, è una conseguenza della disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| &\leq \|\boldsymbol{x_1}\| + \|\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \\
&\leq \|\boldsymbol{x_1}\| + \|\boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \\
&\leq \|\boldsymbol{x_1}\| + \|\boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_3}\| + \|\cdots + \boldsymbol{x_m}\| \\
&\leq \ldots \\
&\leq \|\boldsymbol{x_1}\| + \|\boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_3}\| + \cdots + \|\boldsymbol{x_m}\|
\end{aligned} \tag{10}$$

Questa dimostrazione non è del tutto rigorosa, volendo scrivere una dimostrazione rigorosa è necessario utilizzare l'induzione.

Dimostriamo per induzione la proposizione

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_k\| \qquad \forall m \in \mathbb{N}\ \forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_m} \in \mathbb{R}^N \tag{11}$$

procediamo per induzione su m, il caso $m = 1$ è banale in quanto non c'è niente da dimostrare, il caso $m = 2$ è banale in quanto è la disuguaglianza triangolare, supponiamo allora $m \geq 2$ e dimostriamo la disuguaglianza per $m + 1$

usando la definizione di sommatoria, la disuguaglianza triangolare e l'ipotesi induttiva ricavo

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m+1} \boldsymbol{x}_k\right\| &\overset{\substack{\text{definizione}\\ \text{di sommatoria}}}{=} \left\|\left(\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_k\right) + \boldsymbol{x_{m+1}}\right\| \overset{\substack{\text{disuguaglianza}\\ \text{triangolare}}}{\leq} \left\|\left(\sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x_k}\right)\right\| + \|\boldsymbol{x_{m+1}}\| \\
&\overset{\substack{\text{ipotesi}\\ \text{induttiva}}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{m} \|\boldsymbol{x}_k\|\right) + \|\boldsymbol{x}_{m+1}\| \overset{\substack{\text{definizione}\\ \text{di sommatoria}}}{=} \sum_{k=1}^{m+1} \|\boldsymbol{x_k}\|
\end{aligned} \tag{12}$$

adesso dimostriamo l'altra disuguaglianza, usiamo la 11 nel caso $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{0}$ e ricaviamo

$$\|\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \leq \|\boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_3}\| + \cdots + \|\boldsymbol{x_m}\| \tag{13}$$

moltiplicando ambo i membri per -1 ricaviamo quindi

[2] usando $\boldsymbol{a}$ al posto di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$ al posto di $\boldsymbol{y}$

Email: clemente.romano@sissa.it

$$-\|\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}+\cdots+\boldsymbol{x_m}\| \geq -\|\boldsymbol{x_2}\|-\|\boldsymbol{x_3}\|-\cdots-\|\boldsymbol{x_m}\| \tag{14}$$

adesso usiamo la disuguaglianza triangolare inversa con $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x_2}+\cdots+\boldsymbol{x_m}$, ricavando

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}+\cdots+\boldsymbol{x_m}\| &\overset{\substack{\text{disuguaglianza}\\ \text{triangolare}\\ \text{inversa}}}{\geq} \|\boldsymbol{x_1}\|-\|\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{x_3}+\cdots+\boldsymbol{x_m}\| \\ &\overset{\substack{\text{disuguaglianza}\\ 14}}{\geq} \|\boldsymbol{x_1}\|-\|\boldsymbol{x_2}\|-\|\boldsymbol{x_3}\|-\cdots-\|\boldsymbol{x_m}\|\end{aligned} \tag{15}$$

per dimostrare la disuguaglianza riguardante il polinomio è sufficiente considerare il caso $N=1$ (in cui norma e valore assoluto coincidono) e porre $\boldsymbol{x_1}=a_nx^n$, $\boldsymbol{x_2}=a_{n-1}x^{n-1}$, … , $\boldsymbol{x_{m-1}}=a_1x$, $\boldsymbol{x_m}=a_0$ e usare la disuguaglianza precedente, ricavando

$$\begin{aligned}|p(x)|=|a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0| \geq \ & |a_nx^n|-|a_{n-1}x^{n-1}|-\cdots-|a_1x|-|a_0| \\ &= |a_n|\,|x|^n-|a_{n-1}||x|^{n-1}-\cdots-|a_1|\,|x|-|a_0|\end{aligned} \tag{16}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera grazie alla proprietà di omomorfismo del valore assoluto :
$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

3. Sia $f\ :\ \mathbb{R}^2\to\ \mathbb{R}$ una funzione continua, si dimostri che se $U\subseteq\mathbb{R}$ è un insieme aperto allora $f^{-1}(U)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, dove

$$f^{-1}(U):=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\ :\ f(\boldsymbol{x})\in U\}$$

Soluzione :

Sia $U\subset\mathbb{R}$ un insieme aperto non vuoto, voglio far vedere che $V:=f^{-1}(U)$ è un insieme aperto, per farlo devo dimostrare la seguente proposizione

$$\boldsymbol{x}\in V \implies \exists\delta>0\ :\ B(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq V \tag{17}$$

supponiamo quindi che $\boldsymbol{x}\in V$, allora per definizione si ha che $y:=f(\boldsymbol{x})\in U$.

Il fatto che U è aperto mi dice che esiste $\epsilon>0$ tale che $B(y,\epsilon)\subseteq U$[3]

il fatto che f è continua mi dice che esiste $\delta>0$ tale che

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|<\delta \implies |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|<\epsilon$$

tuttavia osserviamo che questa proposizione è equivalente alla seguente

$$\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x},\delta) \implies f(\boldsymbol{z})\in B(y,\epsilon)$$

otteniamo quindi la catena di implicazioni

$$\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x},\delta) \implies f(\boldsymbol{z})\in B(y,\epsilon) \overset{B(y,\epsilon)\subseteq U}{\implies} f(\boldsymbol{z})\in U \overset{V=f^{-1}(U)}{\implies} \boldsymbol{z}\in V$$

abbiamo quindi dimostrato che $B(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq V$, cioè la 17, che conclude la dimostrazione

4. Sia $A\subset\mathbb{R}$ un insieme limitato inferiormente, sia $\alpha:=\inf(A)$ e sia $\alpha\in A$, dimostrare che A non può essere aperto.[a]

[a]hint : si dimostri che α non appartiene all'interno di A

Soluzione :

Supponiamo per assurdo che A sia aperto, allora $\alpha\in A=A^\circ$, quindi per definizione di interno si ha che

[3]attenzione, si sta usando la stessa notazione per denotare palle aperte di $\mathbb{R}$ e palle aperte di $\mathbb{R}^2$

Email: clemente.romano@sissa.it

$$\exists \delta > 0 \ : \ B(\alpha, \delta) =]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\subset A$$

allora consideriamo $\gamma := \alpha - \delta/2$, da un lato abbiamo che $\gamma \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, quindi $\gamma \in A$, ma $\gamma \in A$ implica che

$$\inf(A) \leq \gamma$$

cioè

$$\alpha \leq \alpha - \delta/2$$

che è chiaramente un assurdo

5. Determinare quale degli insiemi seguenti è aperto, quale è chiuso e quale non è né aperto né chiuso

   (a) $[-\sqrt{77\pi}, 65536[$

   (b) $\bigcup_{n=1}^{\infty}]99n, 99n+1[$

   (c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

   (d) $]\frac{1}{243}, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > \frac{1}{243}\}$

Soluzione :

(a) $A := [-\sqrt{77\pi}, 65536[$ non è aperto in quanto $-\sqrt{77\pi} \in A$ ma $-\sqrt{77\pi} \notin A^\circ$

non è chiuso in quanto $65536 \in \overline{A}$ ma $65536 \notin A$

(b) $A := \cup_{n=1}^{\infty}]99n, 99n+1[$

è aperto in quanto è unione di intervalli aperti,

non è chiuso, per mostrarlo si può osservare che $99 \in \overline{A}$ ma $99 \notin A$

(c)

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

si ha che $A =]0, 1]$, quindi similmente al punto (a) si ha che non è chiuso in quanto $0 \in \overline{A}$ ma $0 \notin A$ e non è aperto in quanto $1 \in A$ ma $1 \notin A^\circ$

(d)

$$A := \left]\frac{1}{243}, \infty\right[= \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ x > \frac{1}{243}\right\}$$

non è chiuso in quanto $1/243 \in \overline{A}$ ma $1/243 \notin A$

è aperto, per mostrarlo si può mostrare che è unione di intervalli aperti, per esempio nel modo seguente

$$A = \left]\frac{1}{243}, \infty\right[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\frac{1}{243}, \frac{1}{243} + n\right[$$

oppure si può mostrare direttamente che $A = A^\circ$

$A^\circ \subseteq A$ vale sempre, quindi devo solo dimostrare che $A \subseteq A^\circ$, cioè devo dimostrare che

$$x \in A \implies \exists \delta > 0 \ : \ B(x, \delta) =]x - \delta, x + \delta[\subseteq A$$

ma per farlo è sufficiente porre $\delta = x - \frac{1}{243}$ in quanto

$$x \in A \implies x > \frac{1}{243} \implies \left]x - \left(x - \frac{1}{243}\right), x + \left(x - \frac{1}{243}\right)\right[= \left]\frac{1}{243}, x + \left(x - \frac{1}{243}\right)\right[\subset \left]\frac{1}{243}, \infty\right[$$

Email: clemente.romano@sissa.it

9. Sia (E, d) uno spazio metrico, sia $\delta > 0$ e sia $A \subseteq E$, si definisce

$$I_\delta(A) := \bigcup_{x \in A} B(x, \delta)$$

Si dimostri che $A \subseteq I_\delta(A)$ e che $I_\delta(A)$ è un insieme aperto [a]

[a] hint : è vero che $x \in B(x, \delta)$? L'unione di insiemi aperti è un insieme aperto?

Soluzione

le palle aperte $B(x, \delta)$ sono insiemi aperti, quindi $I_\delta(A)$ è aperto in quanto è unione di insiemi aperti.

dimostrare che $A \subseteq I_\delta(A)$ è equivalente a dimostrare

$$y \in A \implies y \in I_\delta(A)$$

ma se $y \in A$ allora $y \in B(y, \delta)$ e dato che la palla $B(y, \delta)$ compare nell'unione che definisce $I_\delta(A)$ si ha $y \in I_\delta(A)$

10. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi tali che:

$$\forall a \in A \; \exists b \in B \; : \; a \leq b \quad , \quad \forall b \in B \; \exists a \in A \; : \; a \leq b$$

Dimostrare che

$$\inf(A) \leq \inf(B) \quad , \quad \sup(A) \leq \sup(B)$$

Soluzione :

comincio dimostrando che $\inf(A) \leq \inf(B)$

come si definisce $\inf(B)$? un minorante di B è un numero $\beta \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $b \in B$ si ha $\beta \leq b$, $\inf(B)$ è per definizione il massimo dell'insieme dei minoranti di B, allora per mostrare che $\inf(A) \leq \inf(B)$ è sufficiente mostrare che $\inf(A)$ è un minorante di B, in quanto se $\inf(A)$ è un minorante di B sarà di sicuro minore o uguale del massimo dei minoranti di B, cioè $\inf(B)$.

Devo quindi mostrare che

$$b \in B \implies \inf(A) \leq b$$

tuttavia ho che

$$b \in B \implies \exists a \in A \; : \; a \leq b \implies \inf(A) \leq a \leq b \implies \inf(A) \leq b$$

per dimostrare l'altra disuguaglianza si ragiona in modo simile

continuiamo dimostrando che $\sup(A) \leq \sup(B)$

come si definisce $\sup(A)$? un maggiorante di A è un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in A$ si ha $\alpha \geq a$, $\sup(A)$ è per definizione il minimo dell'insieme dei maggioranti di A, allora per mostrare che $\sup(A) \leq \sup(B)$ è sufficiente mostrare che $\sup(B)$ è un maggiorante di A, in quanto se $\sup(B)$ è un maggiorante di A sarà di sicuro maggiore o uguale del minimo dei maggioranti di A, cioè $\sup(A)$

devo quindi mostrare che

$$a \in A \implies a \leq \sup(B)$$

tuttavia ho che

$$a \in A \implies \exists b \in B \; : \; a \leq b \implies a \leq b \leq \sup(B) \implies a \leq \sup(B)$$

Email: clemente.romano@sissa.it

11. Sia (E, d) uno spazio metrico, sia $A \subseteq E$, sia $x \in E$, si definisce

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\}$$

Dimostrare che[a]

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \qquad \forall x, y \in E$$

da ciò si deduca che

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

e si deduca che $f(x) = d(x, A)$ è una funzione continua.

[a]hint : la disuguaglianza triangolare implica che $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, a questo punto si usi il risultato dell'esercizio 10

Soluzione :

è necessario un lemma

Se $F \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme (non vuoto e inferiormente limitato), $c \in \mathbb{R}$ e S è l'insieme

$$S = \{c + f \ : \ f \in F\}$$

allora si ha

$$\inf(S) = c + \inf(F)$$

seguiamo l'hint e usiamo quindi la disuguaglianza triangolare

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \tag{18}$$

adesso usando il lemma e il risultato dell'esercizio 10, prendendo l'inf ambo i membri ricaviamo

$$\inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\} \leq \inf\{d(x, y) + d(y, a) \ : \ a \in A\} = d(x, y) + \inf\{d(y, a) \ : \ a \in A\}$$

usando la definizione di $d(x, A)$ questa diventa

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

sottraiamo $d(y, A)$ ambo i membri e ricaviamo

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

adesso per ottenere la disuguaglianza è sufficiente ripetere i passaggi dell'esercizio 1, quindi ricaviamo

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

per dimostrare la continuità di $f(x) := d(x, A)$ è sufficiente porre $\delta = \epsilon$ nella definizione di continuità

0.1 Alcune curiosità

alcuni dei numeri che sono comparsi nelle tracce non sono del tutto casuali.

$$\frac{1}{243}$$

Era il 1943, e Richard Feynman, uno dei fisici più brillanti del suo tempo, si trovava a Los Alamos, il luogo segreto dove veniva sviluppata la bomba atomica durante la Seconda Guerra Mondiale. Separato dalla sua amata moglie, Arlene, le scrisse in una lettera che l'espansione decimale della frazione 1/243 si ripete in maniera piuttosto divertente:

$$\frac{1}{243} = 0,00411522633744\ldots$$

Questa lettera irritò il censore della posta fra Los Alamos e il mondo esterno, che temette che la serie di numeri potesse comunicare segreti tecnici. Divertito, Feynman precisò che se realmente si divide 1 per 243, si ottiene quella serie di cifre, così non ci può essere più "informazione" nella lunga serie di numeri di quanta ve ne sia nel singolo numero 243.

Per ulteriori dettagli su Richard Feynman, puoi visitare la pagina di Wikipedia [1].

$$65536$$

La tetrazione è la quarta operazione aritmetica, dopo addizione, moltiplicazione e potenza. Le relative operazioni inverse della tetrazione sono la superradice e il superlogaritmo.

"a tetratto n" si scrive in simboli $a \uparrow\uparrow n$, e si definisce induttivamente come

$$\begin{aligned} &a \uparrow\uparrow 1 := a \\ &a \uparrow\uparrow (n+1) := a^{(a\uparrow\uparrow n)} \end{aligned}$$

cioè

$$a \uparrow\uparrow n = \underbrace{a^{a^{a^{a^{\cdots}}}}}_{\text{n volte}}$$

usando la tetrazione si possono ottenere numeri estremamente grandi, per fare un esempio

quando, in una potenza, l'esponente è troppo lungo da scrivere, il numero potrebbe essere riscritto sotto forma di iperpotenza:

$$53^{24356848165022712132477606520104725518533453128685640844505130879576720609150223301256150373} = 53^{53^{53}} = 53 \uparrow\uparrow 3.$$

il numero 65536 si può caratterizzare come

$$65536 = 2 \uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow\uparrow\uparrow 3$$

Per informazioni sulla tetrazione, consulta la pagina di Wikipedia [2].

Per ulteriori dettagli su Richard Feynman, puoi visitare la pagina di Wikipedia: [1]

$$-\sqrt{77\pi}$$

è un numero a caso.

La disuguaglianza

$$|p(x)| \geq |a_n|\,|x|^n - |a_{n-1}|\,|x|^{n-1} - \cdots - |a_1 x| - |a_0|$$

si può utilizzare per dimostrare il "Teorema fondamentale dell'algebra"

"Give yourself an epsilon of room"

Se $A \subseteq E$ è un sottoinsieme di uno spazio metrico allora si ha che

$$\overline{A} = \bigcap_{\epsilon > 0} I_\epsilon(A)$$

Email: clemente.romano@sissa.it

Riferimenti bibliografici

[1] Wikipedia. Richard feynman - altri interessi e personalità, n.d. https://it.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman#Altri_interessi_e_personalit%C3%A0.

[2] Wikipedia. Tetrazione, n.d. https://it.wikipedia.org/wiki/Tetrazione.

Email: clemente.romano@sissa.it