Tutorato Analisi 1
Soluzioni di alcuni esercizi

Clemente Romano

27 dicembre 2023

1. 07/02/2023 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$f(-2) = -4, \qquad f(-1) = -5, \qquad f(1) = 5, \qquad f(2) = 4$$

Dimostrare che:

i) la funzione non è né convessa né concava;

ii) la funzione derivata $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $[-1, 5] \subset f'(\mathbb{R})$;

iii) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla:

iv) la funzione derivata seconda $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è tale che $[-2, 2] \subset f''(\mathbb{R})$

Soluzione :

In questi esercizi sono fondamentali i rapporti incrementali della funzione f, ne calcolo alcuni[1]

$$\begin{aligned} R(-2,-1) &:= \frac{f(-1) - f(-2)}{(-1) - (-2)} = -1 \\ R(-1,1) &:= \frac{f(1) - f(-1)}{(1) - (-1)} = 5 \\ R(1,2) &:= \frac{f(2) - f(1)}{(2) - (1)} = -1 \end{aligned} \tag{1}$$

i) $R(-1, 1) > R(1, 2)$ ci dice che la non funzione non è convessa, $R(-2, -1) < R(-1, 1)$ ci dice che la funzione non è concava.

ii) Usando il teorema di Lagrange agli estremi $[-2, -1]$ e $[-1, 1]$ troviamo un $\alpha \in]-2, -1[$ e un $\beta \in]-1, 1[$ tali che

$$f'(\alpha) = R(-2, -1) = -1 \quad ; \quad f'(\beta) = R(-1, 1) = 5 \tag{2}$$

a questo punto usando il teorema dei valori intermedi (f' è derivabile e quindi è continua) abbiamo che f' assume tutti i valori compresi tra $f'(\alpha) = -1$ e $f'(\beta) = 5$.

iii) usando il teorema di Lagrange agli estremi $[1, 2]$ troviamo un $\gamma \in]1, 2[$ in cui

$$f'(\gamma) = R(1, 2) = -1 \tag{3}$$

ma allora usando il teorema di Rolle su f' agli estremi $[\alpha, \gamma]$ troviamo un θ^* in cui $f''(\theta^*) = 0$

iv) il punto iv) va risolto con astuzia, vorremmo usare il teorema di Lagrange su f' agli estremi $[\alpha, \beta], [\beta, \gamma]$, tuttavia non conoscendo il valore esatto di α, β, γ ci limitiamo a trovare soltanto delle disuguaglianze.

$$\begin{aligned} R'(\alpha,\beta) &:= \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{6}{\beta - \alpha} \\ R'(\beta,\gamma) &:= \frac{f'(\gamma) - f'(\beta)}{\gamma - \beta} = \frac{-6}{\gamma - \beta} \end{aligned} \tag{4}$$

adesso usando il fatto che $\alpha > -2$ e $\beta < 1$ troviamo che $\beta - \alpha < 3$, da cui segue

[1] $R(a, b)$ e $R'(a, b)$ sono soltanto delle notazioni che ho inventato per poter fare riferimento ai rapporti incrementali in modo veloce, vi consiglio di usare la notazione che ritenete più opportuna

Email: clemente.romano@sissa.it

$$R'(\alpha,\beta) = \frac{6}{\beta-\alpha} > \frac{6}{3} = 2$$

similmente usando il fatto che $\beta > -1$ e $\gamma < 2$ troviamo che $\gamma - \beta < 3$, da cui segue

$$R'(\beta,\gamma) = \frac{-6}{\gamma-\beta} < \frac{-6}{3} = -2$$

usando il teorema di Lagrange trovo un $\theta_1 \in]\alpha,\beta[$ e un $\theta_2 \in]\beta,\gamma[$ tali che

$$\begin{aligned} f''(\theta_1) &= \frac{f'(\beta)-f'(\alpha)}{\beta-\alpha} > 2 \\ f''(\theta_2) &= \frac{f'(\gamma)-f'(\beta)}{\gamma-\beta} < -2 \end{aligned} \tag{5}$$

Adesso vorrei dire che f'' assume tutti i valori compresi tra $f''(\theta_1)$ e $f''(\theta_2)$, a tale fine non posso usare il teorema dei valori intermedi in quanto f'' potrebbe non essere continua, tuttavia è possibile usare la proprietà di Darboux della funzione derivata.

Risolvo adesso degli esercizi proposti da uno studente. Qualora abbiate dei dubbi su ulteriori esercizi, vi invito a contattarmi via email all'indirizzo clemente.romano@sissa.it o a clemente.romano@studenti.units.it

2.
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x-1}}} - 1\right)$$
[a]

[a] la traccia che mi è stata fornita è la seguente $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x-\sqrt{1}}}} - 1\right)$, ho dei dubbi sul $\sqrt{1}$, dato che $\sqrt{1} = 1$ credo che possa esserci un typo

usiamo il limite notevole dell'esponenziale

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \tag{6}$$

tramite il cambio di variabile $t = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ si ricava

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = 1 \tag{7}$$

per giustificare il cambio di variabile è necessario dimostrare che $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} = 0$, tuttavia ciò è molto semplice quindi ometto la dimostrazione, in ogni caso in seguito dimostrerò qualcosa di più forte, ovvero che $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = 1/2$

usando la 7 è molto facile, possiamo procedere in questo modo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x-1}}} - 1\right) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\frac{e^{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} \cdot (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\right) \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} - 1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\right) \\ &\overset{(7)}{=} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) \\ &\overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1-y}}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{1+(-y)}-1}{(-y)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x\sqrt{x}} - (x\sqrt{x})^x}{x^{x^2} - e^{x^2}}$$

Per risolvere questo esercizio è sufficiente capire quali sono i termini "dominanti", innanzitutto conviene scrivere tutto in termini di funzioni esponenziali

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{x\sqrt{x}} - (x\sqrt{x})^x}{x^{x^2} - e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\sqrt{x}\ln(x)} - e^{x\ln(x\sqrt{x})}}{e^{x^2\ln(x)} - e^{x^2}}$$

Limitarmi a esporre i passaggi potrebbe non essere molto istruttivo, quindi prima di farlo cerco di spiegare, in modo euristico, come è possibile dedurre i passaggi seguenti.

L'idea euristica è che per $x \to +\infty$, $x\sqrt{x}\ln(x)$ tende a $+\infty$ "molto" più velocemente rispetto a $x\ln(x\sqrt{x})$. Di conseguenza, $e^{x\ln(x\sqrt{x})}$ è trascurabile rispetto a $x\sqrt{x}\ln(x)$. Analogamente, $x^2\ln(x)$ va a $+\infty$ "molto" più velocemente di quanto faccia x^2, e quindi x^2 è trascurabile rispetto a $x^2\ln(x)$. Per questo motivo, dovremmo essere in grado di cancellare i termini $e^{x\ln(x\sqrt{x})}$ e e^{x^2}. Resta quindi da calcolare il limite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\sqrt{x}\ln(x)}}{e^{x^2\ln(x)}}$$

ma questo fa 0 in quanto $x^2\ln(x)$ va a $+\infty$ "molto" più velocemente di quanto ci va $x\sqrt{x}\ln(x)$.

Adesso cerco di rendere tutte queste argomentazioni rigorose.

Il primo passaggio da rendere rigoroso è la cancellazione dei termini trascurabili, per farlo conviene raccogliere i termini dominanti.

Raccogliamo il primo addendo al numeratore e al denominatore, ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\sqrt{x}\ln(x)} - e^{x\ln(x\sqrt{x})}}{e^{x^2\ln(x)} - e^{x^2}} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\sqrt{x}\ln(x)}}{e^{x^2\ln(x)}}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{x\ln(x\sqrt{x}) - x\sqrt{x}\ln(x)}}{1 - e^{x^2 - x^2\ln(x)}}\right)$$

dico che il secondo limite fa 1, infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(x\sqrt{x}) - x\sqrt{x}\ln(x)} &= \lim_{x\to+\infty} e^{(3/2)x\ln(x) - x\sqrt{x}\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(x)((3/2) - \sqrt{x})} \\ &= e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2 - x^2\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2(1-\ln(x))} = \lim_{x\to+\infty} e^{(+\infty)\cdot(-\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

Abbiamo quindi giustificato il primo passaggio non rigoroso, adesso giustifico il secondo, ovvero il fatto che il primo limite fa 0, abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\sqrt{x}\ln(x)}}{e^{x^2\ln(x)}} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\sqrt{x}\ln(x) - x^2\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\sqrt{x}\ln(x)(1-\sqrt{x})} \\ &= \exp((+\infty)\cdot(-\infty)) = \exp(-\infty) = 0\end{aligned}$$

In definitiva ricaviamo

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\sqrt{x}\ln(x)}}{e^{x^2\ln(x)}}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{x\sqrt{x}\ln(x) - x\ln(x\sqrt{x})}}{1 - e^{x^2 - x^2\ln(x)}}\right) = 0 \cdot \frac{1-0}{1-0} = 0$$

Per delle informazioni sul "DI method" è possibile guardare il video
`https://www.youtube.com/watch?v=2I-_SV8cwsw`

Email: clemente.romano@sissa.it