16/09/2024

Lezione 1

EVA SINCICH (esincich@units.it)

CALCOLO COMBINATORIO

Principio base

Se devi compiere k scelte, e per la prima scelta hai n_1 possibili alternative, per la seconda n_2 possibili alternative ... per la k-esima scelta hai n_k possibili alternative, allora il numero totale di alternative possibili è

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

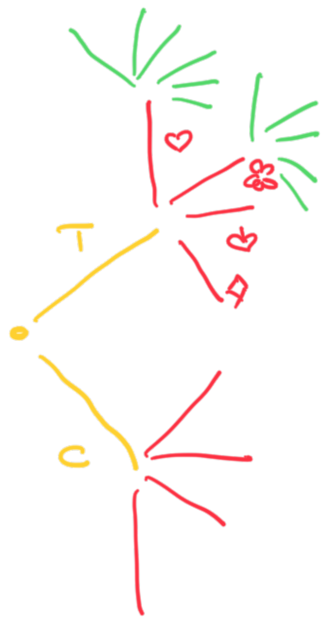
Es. $k = 3$ (3 scelte)

- Supponiamo di avere 2 alternative per la prima scelta $n_1 = 2$ (Testa o croce)
- Supponiamo di avere 4 alternative per la seconda scelta $n_2 = 4$ (Asso di cuori, quadri, fiori, picche)
- Supponiamo di avere 6 alternative

per la terza scelta $n_3 = 6$

(dado a 6 facce)

Le possibili scelte sono $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2 \cdot 4 \cdot 6$



Def (Disposizioni con ripetizione)

Una disposizione di n oggetti k alla volta consiste nell'effettuare k scelte consecutive tra n oggetti, ogni oggetto può venir scelto anche più di una volta.

Dunque il numero $D^*_{n,k}$ di possibili disposizioni con ripetizione di n oggetti k alla volta è

$$D^*_{n,k} = n^k$$

Es. Supponiamo di avere una scatola contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Quante possibili sequenze ordinate di numeri si possono ottenere estraendo (con reimbussolamento) 5 palline?

Oss: $(78, 15, 22, 3, 15) \neq (15, 78, 22, 3, 15)$

$$D^*_{90,5} = 90^5$$

Es. Supponiamo di avere un'urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Quante possibili sequenze ordinate di numeri si possono ottenere estraendo (senza reimbussolamento) 5 palline?

$$D_{90,5} = 90 \cdot (90-1) \cdot (90-2) \cdot (90-3)(90-4)$$

Def (disposizioni senza ripetizioni)

Una disposizione senza ripetizione di n oggetti k alla volta, consiste nell'effettuare k scelte consecutive fra n oggetti, ma ogni oggetto può venir scelto al massimo una volta sola.

Dunque il numero di disposizioni senza ripetizione di n oggetti k alla volta è

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Oss: Un caso particolare interessante è

$$n = k$$

Una permutazione su n oggetti è una disposizione senza ripetizioni di n oggetti presi n alla volta.
Ogni oggetto viene preso una ed una sola volta.
Il numero di permutazioni di n oggetti

$$P_n = D_{n,n} = n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

"n fattoriale"

Oss: $1! = 1 \qquad 2! = 2\cdot 1 \qquad 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

Oss: $0! = 1$ (è una convenzione)

Osserviamo inoltre che $D_{n,k}$ si può esprimere usando il fattoriale

$$D_{n,k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}$$

Es. Supponiamo che le nascite siano distribuite in maniera uniforme su tutto l'anno (trascuriamo il 29 febbraio).
Qual è la probabilità che in un gruppo di 3 persone prese a caso abbiano tutte compleanno diverso.

con rip.

Consideriamo tutte le possibili disposizioni di 365 oggetti 3 alla volta

(01 genn, 01 genn, 01 genn)

Quante sono? $D^*_{365,3} = (365)^3$

Consideriamo tutte le possibili disposizioni senza rip.

Quante sono? $\boxed{D_{365,3}} = \dfrac{365!}{(365-3)!}$

$$\text{Probabilità cercata} = \frac{D_{365,3}}{D^*_{365,3}} = \frac{(365)!}{(362)!} \cdot \frac{1}{(365)^3}$$

$$= \frac{(365)(364)\cdot(363)}{(365)^3}$$

$$\sim 99\%.$$

$$D_{365,3} = \frac{(365)!}{(362)!} = \frac{(365)\cdot(364)\cdot(363)\cdot\cancel{(362)!}}{\cancel{(362)!}}$$

$$D^*_{365,3} = (365)^3$$

$$P = \frac{D_{365,3}}{D^*} = \frac{(365)(364)(363)}{(365)^3}$$

$D_{365,3}$

Se l'ordine non conta?

Def (Combinazioni senza ripetizione)

Una combinazione senza ripetizioni di n oggetti k alla volta è un sottoinsieme degli n oggetti composto da k elementi.

Se indichiamo $C_{n,k}$ il numero delle possibili combinazioni senza ripetizione di n oggetti k alla volta è

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$(k \leq n)$

Es. $n=3$ $\quad k=2$ $\qquad a, b, c$

$D_{n,k} = 3(3-1) = 6$

$\underbrace{(a,b) \quad (b,a)}_{\text{Permutazioni di 2 oggetti}}$ $\qquad (a,c) \quad (c,a)$ $\qquad (b,c) \quad (c,b)$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\{a,b\} \qquad \{c,a\} \qquad \{b,c\}$

$$C_{3,2} = 3 = \frac{6}{2} = \frac{D_{3,2}}{P_2}$$

Es. Quante partite a scacchi possono essere giocate da 6 giocatori?

$$C_{6,2} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

$$\frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2!}$$

Def: Il numero $C_{n,k}$ è chiamato coefficiente binomiale e si indica con il simbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Ricordando la convenzione $0! = 1$ si ha che il coeff. binomiale è definito per $0 \le k \le n$

In particolare si ha che

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Inoltre

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\;1} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Il nome coefficiente binomiale deriva dal fatto che compare nello sviluppo delle potenze di un binomio

$$(a+b)^n$$

- $n=2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a \cdot b + \binom{2}{2} b^2$$

- $n=3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 =$$
$$= \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 \cdot b + \binom{3}{2} a b^2 + \binom{3}{3} b^3$$

La formula generale è

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

$$a^{n-k} \cdot b^k$$

OSS Il termine $a^{n-k} \cdot b^k$ è ottenuto scegliendo b in k degli n fattori $(a+b)$

$k=2$

$$(a+b)^n = (a\overset{\times}{+}b) \cdot (a\overset{\times}{+}b) \; \ldots \; (a+b) \cdot (a+b)$$

$$\times \qquad (a\overset{\times}{+}b) \cdot (a+b)$$

$(a+b)(a+b)\dots$

$(\overset{\times}{a}+b)(a+b) \quad \dots \quad (a+b)(\overset{\times}{a}+b)$

ci sono $\binom{n}{k}$ modi di scegliere k fattori

tra gli n fattori.

Simbolo di sommatoria

Se devo rappresentare la somma di n termini che dipendono da un indice k che varia da 1 ad n posso usare questo simbolo:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Es. • $n = 5$

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5$$

$$a_k = k$$

• $n = 7$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{7} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^7$

Alcune proprietà

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

$$\sum_{k=3} 2^{k} = 2 \quad + 2 \quad + c$$

$c \in \mathbb{R}$

- $$c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$$

- Traslazione degli indici

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+\ell}^{n+\ell} a_{k-\ell}$$

$m = 1 \quad n = 3 \quad \ell = 5$

$$\sum_{k=1}^{3} 2^{k} = \sum_{k=1+5}^{8} 2^{(k-5)}$$

Dunque la formula per la potenza di un binomio

$$(a+b)^n = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^{k}} =$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{n} b^n$$