Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 02.09.24

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2023/2024

Esercizio 1

1. Dare la definizione di funzionale. [1pt]

2. Definire la variazione di un funzionale. [1pt]

3. Dato il funzionale $F[u] = u(0)^2$, calcolare la sua variazione e dire su che funzioni essa si annulla. [2pt]

Si consideri un sistema Lagrangiano a due gradi di libertà, con coordinate libere q_1, q_2.

4. Scrivere il funzionale azione S. [1pt]

5. Calcolare la variazione δS del funzionale azione, scrivendo i vari passaggi. [2pt]

6. Si enunci e si dimostri il "Principio di Hamilton". [3pt]

7. Si usi il principio di Hamilton per dimostrare la proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange per cambiamenti di coordinate. [1pt]

8. Sotto quale condizione il sistema Lagrangiano ha una descrizione Hamiltoniana equivalente? [1pt]

9. Si dia la definizione di trasformazione canonica in un sistema Hamiltoniano. [2pt]

10. Si dica quali trasformazioni canoniche del sistema Hamiltoniano corrispondono alle trasformazioni di coordinate del punto 7 e si dimostri che sono trasformazioni canoniche. [2pt]

Esercizio 2

Nel sistema in figura, un punto materiale di massa m è vincolato a un paraboloide di rotazione di equazione $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$ con $a > 0$ una costante con dimensioni di una lunghezza. Sul sistema agisce la gravità.

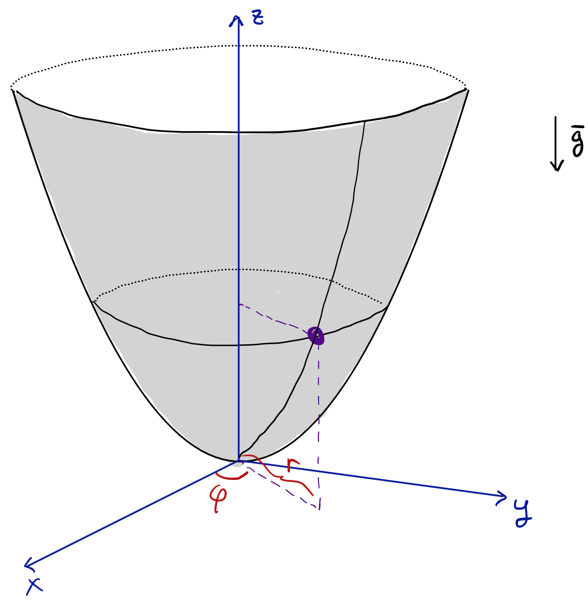
1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate le coordinate polari sul piano xy. In particolare si scriva la matrice cinetica [1pt].

2. Trovare le equazioni di Lagrange [1pt].

3. Che simmetria ha il sistema (oltre all'invarianza per traslazioni temporali)? Ci sono costanti del moto associate ad essa? [1pt]

4. Si usi tale costante del moto per ridurre il problema ad un grado di libertà. Scrivere la Lagrangiana efficace [2pt].

5. Si trovi il punto di equilibrio del problema ridotto e se ne discuta la stabilità [2pt].



6. Si determini la frequenza delle piccole oscillazioni del problema ridotto [1pt].
7. Si descriva le traiettorie nello spazio cartesiano che corrispondono alle piccole oscillazioni del problema ridotto [1pt].
8. Si tracci il grafico del potenziale efficace e si tracci il diagramma di fase del problema ridotto [1pt].

Si aggiunga ora un campo di forze dato da $\vec{F}(x, y, z) = (\mu\, y + \frac{\rho}{x})\, \vec{e}_x + \mu\, x\, \vec{e}_y$.

9. Si scriva la nuova Lagrangiana nelle coordinate libere (x, y) [2pt].
10. Si determinino i punti di equilibrio del problema a due gradi di libertà e se ne discuta la stabilità [2pt].

Esercizio 3

Si cosideri una particella quantistica vincolata su una circonferenza di raggio R e parametrizzata da $\varphi \in [0, 2\pi[$. La sua dinamica è determinata dall'Hamiltoniana

$$H_\theta = \frac{\left(p_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2}\,.$$

1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, trovando autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana $\hat{H}_\theta$ [2,5pt].
2. Si dica se le autofunzioni di $\hat{H}_\theta$ descrivono stati fisici del problema e perché [0,5pt].
3. Si calcoli il valor medio di p_φ nello stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos\varphi$ [1pt].