Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 16.09.24

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2023/2024

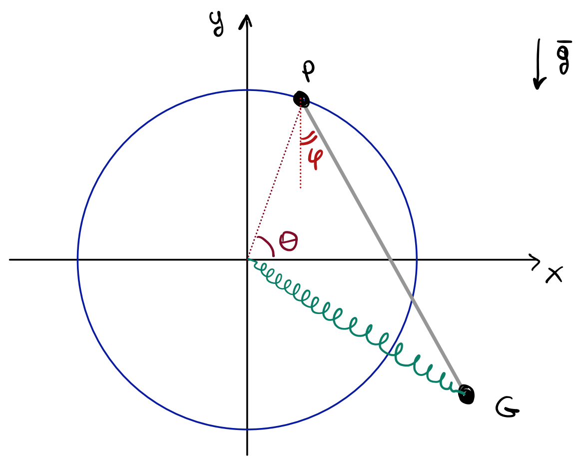
Esercizio 1

1. Dare la definizione di costante del moto in un sistema Lagrangiano. [2pt]
2. Si scriva la Lagrangiana a $n = 3$ gradi di libertà che descrive il moto di un corpo in un campo di forze centrali. Si scriva come le rotazioni spaziali agiscono sulle coordinate dello spazio degli stati. Si dimostri che tale Lagrangiana è invariante sotto le rotazioni. [2pt]
3. Si enunci il teorema di Nöther. [1,5pt]
4. Si usi il teorema di Nöther per dimostrare che il sistema del punto 2 ha tre costanti del moto e dire a quali grandezze fisiche corrispondono. [2pt]
5. Si consideri il moto centrale sul piano in coordinate polari. Si dimostri che le orbite sono date dalla relazione (si utilizzi il metodo che si preferisce):
$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$
con η, e, θ_0 delle costanti. [4pt]
6. Si definisca le parentesi di Poisson e si dica la loro relazione con le costanti del moto. [1,5pt]
7. Si dimostri che se le tre componenti del momento angolare sono costanti del moto, allora anche il modulo del momento angolare è costante del moto. [1,5pt]
8. Si definisca cos'è un sistema integrabile e si dimostri che il sistema al punto 2 è un sistema integrabile. [1,5pt]

Esercizio 2

Nel sistema in figura, un punto materiale P di massa m è vincolato a giacere su una circonferenza (posta verticalmente) di raggio R. A P è incernierata una barra rigida di massa trascurabile e lunghezza $2R$. All'altro estremo della barra c'è un altro punto materiale G di massa m; tale punto è collecato al centro della circonferenza da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere gli angoli θ, φ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].
2. Trovare l'equazione di Lagrange rispetto a θ [1pt].
3. Si dica quale costante si può mettere a zero affinché la Lagrangiana abbia un'ulteriore simmetria e si dica quale è questa simmetria. [2pt]
4. Si trovino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità [5pt].



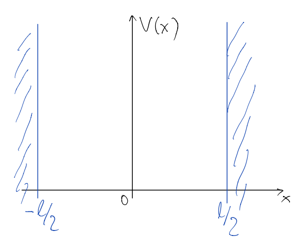
5. Si prenda $\frac{mg}{kR} = \frac{25}{11}$. Si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno a $(\theta, \varphi) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ e si scriva la Lagrangiana linearizzata [2pt].

6. Si consideri il punto precedente e si scrivano le funzioni $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ nell'approssimazione di piccole oscillazioni. [1pt]

7. Si faccia ruotare attorno all'asse y il piano su cui giace il sistema, con velocità angolare costante ω. Si scriva il nuovo contributo alla Lagrangiana del sistema. [1pt]

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si dimostri che le seguenti funzioni d'onda sono autofunzioni dell'Hamiltoniana, derivando i rispettivi autovalori: [1,5pt]

$$\psi_{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right) \; (m = 0, 1, 2, ...) \qquad \psi_{2m} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) \; (m = 1, 2, ...)$$

2. Si consideri la funzione $\psi(x) = \alpha\left[\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right]$. Si calcoli α in modo che ψ sia normalizzata. [0,5pt]

3. Si calcoli il valor medio dell'energia nello stato dato dalla funzione ψ del punto precedente [0,5pt].

4. Si scriva l'evoluto al tempo t dello stato dato dalla funzione ψ [1pt].

5. Si calcoli il valor medio della posizione x nel decimo livello energetico [0,5pt].