TEORIA DEL CAMPO DI RADIAZIONE

Equazioni di Maxwell

$\vec{E}(\vec{r},t)$: campo elettrico $\qquad q$: carica

$\vec{B}(\vec{r},t)$: " magnetico

Carica sottoposta a forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$$

Potenza erogata sulla carica: $\vec{v}\cdot\vec{F} = q\,\vec{v}\cdot\vec{E}$ $\quad (\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}))$

$$\Rightarrow \quad q\,\vec{v}\cdot\vec{E} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Generalizzando alla forza totale su un elemento di volume che contiene una distrib. di cariche:

Forza per unità di volume: $\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}$

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_i q_i \quad : \text{densità di cariche}$$

$$\vec{j} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_i q_i\vec{v}_i \quad : \text{densità di corrente}$$

$\Rightarrow$ Potenza erogata per unità di volume:

$$\frac{1}{\Delta V}\sum_i q_i\,\vec{v}_i\cdot\vec{E}_i = \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Eq di Maxwell collegano $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ, $\vec{j}$. In unità di Gauss

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$ (legge di Coulomb) ; $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (legge di Gilbert)

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$: legge di induzione di Faraday

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$: legge di Ampere dove: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$

ε, μ: cost dielettrica e permeabilità magn. del mezzo

Nel vuoto: $\varepsilon = \mu = 1$

Eq di M. implicano conservaz della carica:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{eq. di continuità}$$

Definizioni di densità e flusso di energia:

Lavoro fatto per unità di volume:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left[c(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

Usare identità: $\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{H})$

Usando eq di M:

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \left[-\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - c \vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

Se ε e μ indip dal tempo

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon E^2 + B^2/\mu \right] = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} \right) \rightarrow \text{Teorema di Poynting}$$

Variaz dell'en meccanica per unità di volume + variazione di densità di energia del campo EM = − la divergenza del flusso di energia del campo

Densità di energia del campo EM:

$$U_{field} = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon E^2 + B^2/\mu \right) = U_E + U_B$$

Vettore di Poynting (del flusso EM): $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$

Integrando su un elemento di volume ed usando teorema della divergenza:

$$\int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV + \frac{d}{dt}\int_V \frac{\varepsilon E^2 + B^2/\mu}{8\pi}\,dV = -\int_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(U_{mech} + U_{field}\right) = -\int_\Sigma \vec{S}\cdot d\vec{A}$$

→ Rate di variazione dell'en. meccanica + di campo entro Σ = flusso di energia entrante attraverso Σ.

U_{field} ha anche contributo dalla materia, dipendendo da ε e μ; stiamo mettendo l'energia delle cariche legate in U_{field}. Se avessimo trattato tutte le cariche (libere e legate) come parte del nostro sistema meccanico, avremmo dovuto usare i campi "microscopici" $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$\Rightarrow \vec{j}$ ~~costituita~~ dalla corrente di conduzione e dalle correnti molecolari indotte. Quindi:

$$S \rightarrow (c/4\pi)\,\vec{E}\times\vec{B}$$

Quindi se consideriamo o il flusso di energia microscopica o i campi nel vuoto, ed essendo $p = E/c$ per i fotoni, possiamo definire il momento nel campo EM per unità di volume come:

$$\vec{g} = \frac{1}{4\pi c}\,\vec{E}\times\vec{B}$$

$\Rightarrow$ Il momento angolare associato al campo: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{g}$

$\vec{E}$ e $\vec{B} \propto r^{-2} \Rightarrow |\vec{S}| \propto r^{-4}$ nel caso statico

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \vec{S} \cdot d\vec{A} \xrightarrow[\Sigma \to \infty]{} 0 \quad \text{essendo } dA \propto r^2$$

Per time-varying fields, si può avere, $|\vec{E}|, |\vec{B}| \propto r^{-1}$
$\Rightarrow$ l'integrale può dare un contributo finito alla variaz. di energia del sistema.

L'energia che fluisce verso l'interno o verso l'esterno di Σ è detta <u>radiazione</u>.

Le componenti di $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che scalano come $\propto r^{-1}$ si dicono <u>campi di radiazione</u>.

Onde elettromagnetiche

Una delle più importanti soluzioni delle eq. di Maxwell è data dalla propagazione di onde EM nel vuoto, cioè

$$\rho = 0 \quad ; \quad \vec{J} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$

legge di Faraday

$$= c\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)$$

Essendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ed usando la regola BAC-CAB

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} .$$

In tal modo le eq. di Maxwell diventano, nel vuoto, le equaz. d'onda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0} \quad ; \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{B} = 0}$$

Si noti che:

1. Eq. di Maxwell per $\partial \vec{E}/\partial t$ e $\partial \vec{B}/\partial t$ implicano che $\vec{E} \perp \vec{B}$
2. Il vettore di Poynting, $\vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{B}$ punta nella direzione di propagazione dell'onda
3. Le soluzioni generali si ottengono usando le trasformate di Fourier.

Si considerino le soluzioni del tipo:

$$\vec{E} = \hat{a}_1 E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad ; \quad \vec{B} = \hat{a}_2 B_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$\hat{a}_1, \hat{a}_2$: versori ; E_0, B_0: numeri complessi

$\vec{k} = k\hat{n}$: vettore d'onda

ω: frequenza

Soluzione di onde che si propagano nella direzione $\hat{n}$.
La soluzione generale delle Eq. di M. sarà data dalla sovrapposizione di onde di questo tipo, propagantesi in diverse direzioni e con diverse frequenze.
Sostituendo nelle Eq. di M. si ha:

$$i\vec{k}\cdot\hat{a}_1 E_0 = 0 \quad ; \quad i\vec{k}\cdot\hat{a}_2 B_0 = 0$$

$$i\vec{k}\times\hat{a}_1 E_0 = \frac{i\omega}{c}\hat{a}_2 B_0 \quad ; \quad i\vec{k}\times\hat{a}_2 B_0 = -\frac{i\omega}{c}\hat{a}_1 E_0$$

$\Rightarrow$ $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \vec{k}$ perpendicolari l'uno all'altro.
I valori di E_0 e B_0 sono collegati da

$$E_0 = \frac{\omega}{kc} B_0 \quad ; \quad B_0 = \frac{\omega}{kc} E_0 \Rightarrow E_0 = \left(\frac{\omega}{kc}\right)^2 E_0 \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

$\Rightarrow$ $\omega = ck$ essendo ω e k positivi $\Rightarrow$ $E_0 = B_0$

L'onda si propaga con velocità di fase

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = c$$

, cioè le onde si propagano alla velocità della luce; questa è la definizione cinematica di velocità della luce.

Si calcoli ora il flusso di energia e la densità di energia associate a queste onde.
Siccome $\vec{E}$ e $\vec{B}$ variano in modo sinusoidale, anche il vettore di Poynting lo farà $\Rightarrow$ si prendano le medie temporali, che sono comunque le quantità in genere osservate.

Se $A(t)$ e $B(t)$ hanno la stessa variazione sinusoidale:

$$A(t) = \mathcal{A}\, e^{i\omega t} \quad ; \quad B(t) = \mathcal{B}\, e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$ la media temporale del prodotto delle loro parti reali è

$$\langle \mathrm{Re}\, A(t) \cdot \mathrm{Re}\, B(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\mathcal{A}\mathcal{B}^*) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\mathcal{A}^*\mathcal{B})$$

Quindi la media temporale del vettore di Poynting è

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}(E_0 B_0^*) = \frac{c}{8\pi} |E_0|^2 = \frac{c}{8\pi} |B_0|^2$$

La media temporale della densità d'energia è

$$\langle U \rangle = \frac{1}{16\pi} \mathrm{Re}(E_0 E_0^* + B_0 B_0^*) = \frac{1}{8\pi} |E_0|^2 = \frac{1}{8\pi} |B_0|^2$$

$\Rightarrow$ La velocità del flusso di energia è anche $\langle S \rangle / \langle U \rangle = c$

Lo Spettro della radiazione

Si può parlare di spettro di un "train waves" o in un punto su un intervallo temporale Δt suffic. lungo, ma non ad un certo istante conoscendo E in un punto. Avendo un record su Δt, possiamo definire uno spettro con risol. in freq. $\Delta\omega$ tale che: $\Delta t \Delta\omega > 1$

Assumiamo che la radiaz. sia un segnale (pulse) limitato cioè che $\vec{E}(t)$ vada a zero per $t \to \pm\infty$. Per semplicità trattiamo una sola componente di $\vec{E}(t)$: $E(t) = \hat{a} \cdot \vec{E}(t)$

$$\Rightarrow \hat{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$E(t) \text{ é reale} \Rightarrow \hat{E}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{E}^*(\omega)$$

$\Rightarrow$ le frequenze negative possono essere eliminate

$\Rightarrow$ $\hat{E}(\omega)$ contiene tutte le infos sul comportamento in frequenza di $E(t)$

$$\frac{dW}{dt\,dA} = \frac{c}{4\pi} E^2(t)$$ $\Rightarrow$ energia per unità di tempo e di area

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt$$ $\to$ en. totale per unità di area del segnale

Per il teorema di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega$$

$$|\hat{E}(\omega)|^2 = |\hat{E}(-\omega)|^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = 4\pi \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dW}{dA} = c\int_0^{\infty} |\hat{E}(\omega)|^2 d\omega$$

Cosicché l'energia per unità di area e freq. è

$$\frac{dW}{d\omega\, dA} = c\,|\hat{E}(\omega)|^2$$

Se il segnale si ripete su un tempo-scala medio T, si può scrivere formalmente:

$$\frac{dW}{dA\,d\omega\,dt} \equiv \frac{1}{T}\frac{dW}{dA\,d\omega} = \frac{c}{T}|\hat{E}(\omega)|^2$$

2.2 e 2.3

→ MOSTRARE ESEMPI: Fig. 2.1 di RL

1. La durata T del segnale determina la larghezza della feature più sottile dello spettro di larghezza $\Delta\omega$.
2. Una time-dependence sinusoidale causa lo spettro a concentrarsi intorno a $\omega \sim \omega_0$.

Polarizzazione delle onde elettromagnetiche

Onde Monocromatiche

Le onde monocromatiche sono polarizzate linearmente: $\vec{E}$ oscilla nella direz. $\hat{a}_1$ che, con la direzione di propagazione, definisce il piano di polarizzazione.
La sovrapposizione di soluzioni che corrispondono a due di tali oscillazioni in direzioni perpendicolari l'una all'altra fornisce lo stato di polarizzazione più generale per un'onda di vettore $\vec{k}$ e frequenza ω.
Si consideri $\vec{E}$ in un punto arbitrario, diciamo $\vec{r}=0$, ed assi x, y con versori $\hat{x}, \hat{y}$ (MOSTRARE FIG 2.4 DI PAG. 63 DEL RL)
Direzione $\vec{k}$ uscente dalla pagina, verso l'osservatore

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = (\hat{x} E_1 + \hat{y} E_2)\, e^{-i\omega t} = \vec{E}_0\, e^{-i\omega t} \rightarrow \text{generalizza } \vec{E} = \hat{a}_1 E_1$$

E_0: ampiezza complessa
$E_1 = \mathcal{E}_1 e^{i\varphi_1}$; $E_2 = \mathcal{E}_2 e^{i\varphi_2}$ → ampiezze complesse.

La parte reale di $\vec{E}$ dà la componente fisica del campo elettrico lungo x e y:

$$E_x = \mathcal{E}_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \quad ; \quad E_y = \mathcal{E}_2 \cos(\omega t - \varphi_2) \qquad (*)$$

Si mostri ora che la figura tracciata durante la propagazione è un'ellisse e quindi l'onda generica avrà polarizzazione ellittica.

Equazione dell'ellisse con assi principali x', y', aventi un angolo di tilt χ rispetto a x, y:

$$E'_x = \mathcal{E}_0 \cos\beta \cos\omega t \quad ; \quad E'_y = -\mathcal{E}_0 \sin\beta \sin\omega t \qquad (**)$$

$-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. L'ampiezza degli assi principali è $\mathcal{E}_0|\cos\beta|$; $\mathcal{E}_0|\sin\beta|$, essendo $(E'_x/\mathcal{E}_0\cos\beta)^2 + (E'_y/\mathcal{E}_0\sin\beta)^2 = 1$

L'ellisse ruoterà in senso orario per $0<\beta<\pi/2$ ed antiorario per $-\pi/2<\beta<0$, come visto da un osservatore verso cui l'onda si sta propagando.
Si parla rispettivamente di polarizzazione right-handed e left-handed, oppure elicità negativa e positiva.
Casi particolare:
$\beta = \pm\pi/4 \rightarrow$ l'ellisse diviene un cerchio $\Rightarrow$ polarizzazione circolare

$\beta = 0, \pm\pi/2 \rightarrow$ ellisse è una linea retta $\Rightarrow$ polar. lineare; in tal caso non esiste elicità.

Si mettano ora in relazione le quantità in eq. (*), con quelle che definiscono l'ellisse di polarizzazione.
Si trasformino le componenti del campo elettrico in (**) sugli assi x, y, ruotando dell'angolo χ:

$$E_x = \mathcal{E}_0(\cos\beta\cos\chi\cos\omega t + \sin\beta\sin\chi\sin\omega t)$$
$$E_y = \mathcal{E}_0(\cos\beta\sin\chi\cos\omega t - \sin\beta\cos\chi\sin\omega t)$$

Queste sono identiche alle (*) prendendo

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \cos\varphi_1 = \mathcal{E}_0 \cos\beta \cos\chi \\ \mathcal{E}_1 \sin\varphi_1 = \mathcal{E}_0 \sin\beta \sin\chi \\ \mathcal{E}_2 \cos\varphi_2 = \mathcal{E}_0 \cos\beta \sin\chi \\ \mathcal{E}_2 \sin\varphi_2 = -\mathcal{E}_0 \sin\beta \cos\chi \end{array}\right\} \text{Da risolvere per } \mathcal{E}_0, \beta, \chi \text{ dati } \mathcal{E}_1, \varphi_1, \mathcal{E}_2, \varphi_2$$

Per la soluzione, si introducano i parametri di Stokes

$$I = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}_0^2$$

$$Q = \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}_0^2 \cos 2\beta \cos 2\chi$$

$$U = 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathcal{E}_0^2 \cos 2\beta \sin 2\chi$$

$$V = 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \mathcal{E}_0^2 \sin 2\beta$$

In tal modo si ottiene

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{I} \quad ; \quad \sin 2\beta = \frac{V}{I} \quad ; \quad \tan 2\chi = \frac{U}{Q}$$

La polarizzazione puramente ellittica è caratterizzata dai soli 3 parametri $\mathcal{E}_0, \beta, \chi$. Quindi deve esistere una relaz. che collega i 4 param. di Stokes. Infatti è

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$$

che vale solo per onde monocromatiche.

Significato dei param. di Stokes:

I: proporzionale al flusso totale di energia

V: parametro di circolarità: misura il rapporto degli assi dell'ellisse; $V > 0$ o < 0 per polar. destrorsa o sinistrorsa; $V = 0$: polar. lineare

Q, U: misurano l'orientazione dell'ellisse rispetto all'asse x; $Q = U = 0$: polarizzaz. circolare.

Polarizzaz. per radiaz. quasi monocromatica

Monochrom. wave sono 100% polarizzate, visto che $\vec{E}$ ha direzioni non random (traccia ellisse)

Di solito si ha sovrapposiz. di varie onde, ognuna con la sua polarizzaz.

Quasi monocromatiche: ampiezza e fasi che variano lentamente:

$$E_1(t)=\mathcal{E}_1(t)\,e^{i\varphi_1(t)} \quad ; \quad E_2(t)=\mathcal{E}_2(t)\,e^{i\varphi_2(t)}$$

Si assume che nell'intervallo di tempo $1/\omega$ l'onda sia completamente polarizzata, ma che per $\Delta t \gg 1/\omega$ $\mathcal{E}_{1,2}$, $\varphi_{1,2}$ varino sostanzialmente.

$\Rightarrow$ lo spread in frequenza $\Delta\omega > 1/\Delta t \Rightarrow \Delta\omega \ll \omega$

$\Rightarrow$ quasi monocromatica

$\Delta\omega$: bandwidth dell'onda

Δt : coherence time

Processo di misura: onda in un detector che misura $\langle E^2\rangle$, dove $\langle\ \rangle$ è una media temporale $\Rightarrow$ misura di flusso. Il device di misura forma una combinazione lineare delle due componenti indipendenti di $\vec{E}$, con pesi e fasi arbitrarie.

$$\left.\begin{aligned} E_1' &= \lambda_{11}E_1+\lambda_{12}E_2 \\ E_2' &= \lambda_{21}E_1+\lambda_{22}E_2 \end{aligned}\right\}$$ uscita del device, che va nel detector di misura.

λ_{ij} : costanti complesse che descrivono l'apparato di misura

Le quantità misurabili sono la media della somma dei quadrati delle componenti x' e y' di $\vec{E}$.

Per x':

$$2\left\langle \left[\mathrm{Re}\, E_1' e^{-i\omega t}\right]^2 \right\rangle = |\lambda_{11}|^2 \langle E_1 E_1^* \rangle + \lambda_{11}\lambda_{12}^* \langle E_1 E_2^* \rangle +$$
$$+ \lambda_{12}\lambda_{11}^* \langle E_2 E_1^* \rangle + |\lambda_{12}|^2 \langle E_2 E_2^* \rangle$$

Si è usata la relazione:

$$\langle \mathrm{Re}\, A(t) \cdot \mathrm{Re}\, B(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(a B^*) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(a^* B)$$

con $A(t) = a\, e^{i\omega t}$; $B(t) = B\, e^{i\omega t}$

per mediare sulla parte "rapida" della variazione temporale, data da $e^{i\omega t}$.

Le $\langle\ \rangle$ nella r.h.s. si riferiscano alla media temporale sulle combinaz. di $E_1(t)$ e $E_2(t)$ che variano lentamente. P. es.

$$\langle E_1 E_2^* \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_1(t) E_2^*(t)\, dt \ ;$$

$[0,T]$ = intervallo di tempo durante cui si effettua la misura. / Risultato analogo per la y-componente

Il risultato della misura dipenderà dal campo di radiaz. attraverso le 4 quantità complesse $\langle E_i(t) E_j^*(t) \rangle$ $\Rightarrow$ Equivalenti a 4 quantità reali, essendo:

$\langle E_1 E_1^* \rangle$ e $\langle E_2 E_2^* \rangle$: reali

$\langle E_1 E_2^* \rangle$ e $\langle E_1^* E_2 \rangle$: complessi coniugati

$\Rightarrow$ Esprimere $\langle E_i(t) E_j^*(t) \rangle$ in termini dei "Parametri di Stokes per onde quasi monocromatiche":

$$I \equiv \langle E_1 E_1^* \rangle + \langle E_2 E_2^* \rangle = \langle \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 \rangle$$

$$Q \equiv \langle E_1 E_1^* \rangle - \langle E_2 E_2^* \rangle = \langle \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2 \rangle$$

$$U \equiv \langle E_1 E_2^* \rangle + \langle E_2 E_1^* \rangle = \langle 2 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle$$

$$V \equiv \frac{1}{i} (\langle E_1 E_2^* \rangle - \langle E_2 E_1^* \rangle = \langle 2 \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle$$

Si recuperano le preced. espressioni per $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \varphi_1, \varphi_2$ costanti

$\Rightarrow$ 2 onde aventi gli stessi param. di Stokes non possono esser distinte da apparati di misura che misurino time-average square di $E(t)$.

Per la disuguaglianza di Schwarz:

$$\langle E_1 E_1^* \rangle \langle E_2 E_2^* \rangle \geq \langle E_1 E_2^* \rangle \langle E_1^* E_2 \rangle \Rightarrow I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$$

Segno $=$ se $E_1(t)/E_2(t)$ = time independent

$\Rightarrow \vec{E}$ traccia un'ellisse di shape ~~fissa~~ e orientazioni fisse, con dimensione che varia lentamente con t

$\Rightarrow$ completamente equiv. a onda monocromatica con pura polarizz. ellittica, essendo i parametri di Stokes identici

Altro caso estremo: onda completamente non polarizzata

$\Rightarrow$ nessun orientamento preferito nel piano x, y

$$\Rightarrow \langle \mathcal{E}_1^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_2^2 \rangle$$

$$\Rightarrow Q = U = V = 0 \quad \text{o} \quad Q^2 + U^2 + V^2 = 0$$

Stokes parameters sono additivi per sovrappos. di onde indipendenti.

K onde $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$E_1 = \sum_k E_1^{(k)} \quad ; \quad E_2 = \sum_\ell E_2^{(\ell)} \longrightarrow \text{sovrapposiz. di diverse onde.}$$

$$\Rightarrow \langle E_i E_j^* \rangle = \sum_k \sum_\ell \langle E_i^{(k)} E_j^{*(\ell)} \rangle = \sum_k \langle E_i^{(k)} E_j^{*(k)} \rangle$$

Per onde indip. con fasi distrib. in modo random solo i termini con $k = \ell$ sopravvivono all'operat. di media temporale

$$\Rightarrow I = \sum_k I^{(k)}, \ldots$$

Per il principio di sovrapposizione, possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - \sqrt{Q^2+U^2+V^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{Q^2+U^2+V^2} \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}$$

Onda non polarizzata di intensità $I - \sqrt{Q^2+U^2+V^2}$

$\rightarrow$ onda polarizzata ellitticamente di intensità $\sqrt{Q^2+U^2+V^2}$

$\Rightarrow$ Onda arbitraria come sovrapposiz. di una completam. polarizzata e una complet. non polarizzata

$\Rightarrow$ onda parzialmente polarizzata

Grado di polarizzazione definito come:

$$\Pi \equiv \frac{I_{pol}}{I} = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}$$

Caso speciale: polarizzaz. parziale lineare (con $V=0$).

$\Rightarrow$ analizzata usando un singolo filtro polarizzatore lineare (p.es. un'antenna di dipolo), che seleziona solo la componente di $\vec{E}$ in una direzione

I_{max}: valore max dell'intensità: si ottiene quando il filtro è allineato col piano di polarizzaz. (asse x')

I_{min}: filtro allineato con asse y'

La radiaz. non polarizzata contribuisce solo per metà della sua intensità in ogni misura, essendo l'intensità totale suddivisa tra qualunque due direzioni ortogonali

$$\Rightarrow \quad I_{max} = \frac{1}{2} I_{unpol} + I_{pol} \quad \text{con} \quad I_{pol} = \sqrt{Q^2 + U^2}$$

$$I_{min} = \frac{1}{2} I_{unpol} \quad \text{con} \quad I_{unpol} = I - \sqrt{Q^2 + U^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$