

I potenziali elettromagnetici

Essendo $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, si può esprimere \vec{B} in termini del potenziale vettore \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Quindi la legge di Faraday diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

Ciò significa che $\vec{E} + (1/c) \partial \vec{A} / \partial t$ può essere scritto come gradiente di un campo scalare, cioè:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

Sia \vec{A} che ϕ sono definiti a meno del gradiente di una funzione scalare ψ , che definisce la scelta di gauge.

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \psi ; \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Se per } \vec{A} \text{ trasformiamo} \\ \text{così, } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ risultano} \\ \text{invarianti} \end{array} \right.$$

dove $\psi(\vec{x}, t)$ è completamente arbitraria.

Tali trasformazioni si chiamano di gauge. Grazie ad esse, è possibile effettuare scelte del potenziale tale da semplificare le equazioni. \longrightarrow

La scelta più importante è quella per la quale è soddisfatta la condizione di Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

La Gauge corrispondente a tale equaz. si chiama Gauge di Lorentz.

In termini dei potenziali, la 1^a eq. di Maxwell è:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \Rightarrow -\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi \rho$$

Con la Gauge di Lorenz si ha

$$-\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\pi \rho$$

Per ottenere l'equazione per \vec{A} si procede come segue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Usando la condizione di Gauge:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Quindi, l'equazione da risolvere può essere scritta nella forma

$$\square^2 \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j}/c \end{pmatrix}$$

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow \text{operatore di d'Alembert}$$

La soluzione di tali equazioni può essere scritta come integrali sui termini di sorgente:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{[\rho]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' ; \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \int \frac{[\vec{j}]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}'$$

dove la notazione $[Q]$ ha il significato di dire che Q è calcolato al tempo ritardato

$$[Q] = Q(\vec{x}', t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|) ; t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \text{ tempo ritardato}$$

Il tempo ritardato si riferisce alle condizioni alla posizione \vec{x}' che si avevano al tempo t' , precedente a t della quantità necessaria alla luce per viaggiare tra \vec{x} e \vec{x}' .

Metodo diretto per calcolare campo \vec{E} e \vec{B} davanti a correnti densità di carica ρ e di corrente \vec{j} : si

1. si trovano i potenziali ritardati ϕ ed \vec{A} tramite gli integrali di cui sopra;
2. si determinano \vec{E} e \vec{B} dalle loro espressioni in termini di tali potenziali.

Per una particella in movimento si ha:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$$

Inserendo nelle eq. per i potenziali ritardati, e dopo una serie di calcoli, si ha:

DERIVAZIONE

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{v} / c} \cdot \begin{pmatrix} q \\ q\vec{j}/c \end{pmatrix} \right] \text{ --> Potenziali di Liénard-Wiechert}$$

calcolato al tempo ritardato $\tau = 0$, che si trova dalla soluzione di

$$t = \tau + R(\tau) / c$$

$$\text{essendo } R(\tau) = |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|$$

Derivazione dei potenziali di Liénard-Wiechert

Particella di carica q che si muove lungo

$$\vec{r}_c = \vec{r}_c(t), \text{ con velocità } u(t) = \dot{\vec{r}}_c(t)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= q \delta(\vec{r} - \vec{r}_c(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= q u(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_c(t)) \end{aligned}$$

La carica totale e la corrente totale saranno date da:

$$q = \int \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r}, \quad \vec{j} = q\vec{u} = \int \vec{j}(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$$

Si calcolino da queste i corrispondenti potenziali ritardati: Si seri il potenziale scalare come esempio:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{[\rho] d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \int d^3\vec{r}' \int dt' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' + |\vec{r} - \vec{r}'|/c)$$

Sostituendo l'espressione per la densità di carica ed integrando su \vec{r}' , si ha

$$\phi(\vec{r}, t) = q \int \delta(t - t' + |\vec{r} - \vec{r}_c(t')|/c) \frac{dt'}{|\vec{r} - \vec{r}_c(t')|}$$

Si introduca ora la notazione:

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_c(t') \quad ; \quad R(t') = |\vec{R}(t')| \rightarrow \text{distanza dalla posiz. della carica al tempo } t'$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}, t) = q \int R'(t') \delta(t - t' + R(t')/c) dt'$$

Procedendo in modo analogo sarà anche

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{c} \int \vec{u}(t') R'(t') \delta(t - t' + R(t')/c) dt'$$

L'argomento della δ -function si annulla per il valore $t' = t_{\text{ret}}$ data da $c(t - t_{\text{ret}}) = R(t_{\text{ret}})$

Si esegua il cambiamento di variabili

$$t'' = t' - R + R(t')/c \Rightarrow dt'' = dt' + (\dot{R}(t')/c) dt'$$

$$\Rightarrow \text{Essendo } R^2(t') = |R(t')|^2 \Rightarrow 2R(t')\dot{R}(t') = -2\vec{R}(t') \cdot \vec{u}(t'),$$

essendo $\vec{R}(t') = -\vec{u}(t')$ \rightarrow velocità della carica

Definendo anche il versore $\hat{n} = \vec{R}/R$, si ha

$$dt'' = \left[1 - \frac{1}{c} \hat{n}(t') \cdot \vec{u}(t') \right] dt'$$

$$\phi(\vec{r}, t) = q \int R'(t') \left[1 - \frac{1}{c} \hat{n}(t') \cdot \vec{u}(t') \right]^{-1} \delta(t'') dt''$$

L'integrale su t'' si può eseguire mettendo $t'' = 0$ o, equivalentemente $t' = t_{\text{ret}}$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}, t) = q \left[\frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{u}/c} \right]_{t_{\text{ret}}}$$

In modo analogo si ottiene per il potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q \vec{u}}{c} \left[\frac{1}{R - \vec{R} \cdot \vec{u}/c} \right]_{t_{\text{ret}}}$$

Se definiamo:

$$\chi(t') = 1 - \frac{1}{c} \hat{n}(t') \cdot \vec{u}(t')$$

$$\Rightarrow \phi = \left[\frac{q}{\chi R} \right]_{t_{\text{ret}}} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow \text{Potenziali di Liénard-Wiechert}$$
$$\vec{A} = \left[\frac{q \vec{u}}{c \chi R} \right]_{t_{\text{ret}}}$$

Se $\vec{a} = 0$: $\phi = q/R \Rightarrow$ potenziale di Coulomb

$\vec{a} \neq 0$: $\vec{A} \neq 0 \Rightarrow \vec{B} \neq 0 \rightarrow$ cariche in movimento producono il campo \vec{B} .

Calcolo dei campi \vec{E} e \vec{B}

Per calcolare i campi EM da ϕ ed \vec{A} , si inseriscono i potenziali di Lienard-Wiechert in

$$\vec{B} = \vec{v} \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}\phi$$

I calcoli sono piuttosto lunghi, anche se non particolarmente difficili (vedere il libro di testo del Jackson, 1975)

I calcoli richiedono il passaggio dal tempo ritardato τ a quello t , cariche si deve calcolare

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} \right)$$

che rappresenta il rapporto tra gli intervalli intercorrenti tra gli stessi due eventi, come provato dalla parzialità in moto ($\Delta\tau$) e come visto dall'osservatore (Δt).

Il risultato finale è:

$$\vec{E} = \frac{q}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \left\{ (1 - \beta^2) (\vec{R} - R\vec{\beta}) + \frac{R}{c} [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right\}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}$$

dove $\vec{\beta} = \vec{v}/c$; si noti che sarà sempre $\vec{B} \perp \vec{E}$



2 differenza col caso della teoria elettrostatica.

1. C'è il termine $\gamma = 1 - (\dot{\vec{m}} \cdot \vec{r}/c)$ → è importante per $|\vec{r}| \rightarrow c$; vedremo che concentra il potenziale in un cono stretto nelle vicinanze del moto della carica → beaming effect.

2. Tutte le quantità calcolate al tempo ritardato t_{ret} → questo rende possibile ad una particella di irradicare. Si vedrà che il calcolo al tempo ritardato permette di avere la dipendenza da $1/r$ dei campi, anziché da $1/r^2$ → flusso di radiazione a infinite.

Si noti che l'equazione per \vec{E} ha due componenti:

1. Il primo termine della somma, dR^{-2} , che dipende dalla velocità: campo di velocità o parte coulombiana
2. Il secondo termine, dR^{-1} , dipende dall'accelerazione: campo di accelerazione o di radiazione.

Nel seguito saremo sempre interessati alla seconda parte!

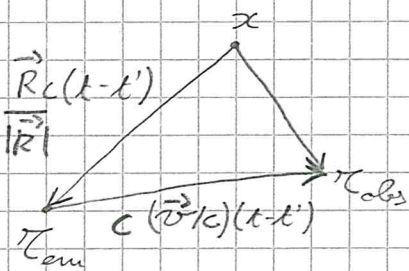


FIG. 3.1 R-L

Si consideri una particella che si muove in una linea retta con velocità costante. Il campo \vec{E} punterà sempre verso la posizione corrente della particella

1. Posizione della particella all'emissione: $dR(\tau)c(t-\tau)$
2. Moto della particella tra l'istante di emissione e l'istante a cui il segnale giunge all'osservatore $d\vec{v}(t-\tau)$

\Rightarrow Spostamento tra i punti di emissione e di osservazione $d\vec{R}(\tau) - \vec{v}(t-\tau) \Rightarrow d\vec{E}$

\rightarrow Spostamento dal punto ritardato al punto dove calcolare il campo: $(\vec{R}/|\vec{R}|)c(t-t_{ret})$ dove $t-t_{ret}$ è il light travel time

Alla stesso tempo la particella subisce lo spostamento $\vec{\beta}c(t-t_{ret})$ con $\vec{\beta} = \vec{v}/c$

Quindi lo spostamento tra il punto del campo e la posizione corrente della particella è

$\left(\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} - \vec{\beta} \right) c t$ cioè parallelo al campo \vec{E} .
termine di velocità nel

Il termine di accelerazione in $\vec{E}(\vec{r}, t)$ decresce con $1/R$, e $\vec{\beta}$ (acceleraz) è perpendicolare a \hat{n} .

Questo \vec{E} , ed il corrispondente \vec{B} , costituiscono il campo di radiazione:

$$\vec{E}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n}}{R} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right] ; \vec{B}_{\text{rad}} = \hat{n} \times \vec{E}_{\text{rad}}$$

\vec{E} , \vec{B} , \hat{n} formano una terna destrorsa di vettori tra loro ortogonali, con $|\vec{E}_{\text{rad}}| = |\vec{B}_{\text{rad}}|$. Tali proprietà sono consistenti con la soluzione di radiazione delle Eq. di Maxwell senza termini di sorgente.

Particelle in moto non-relativistico

In regime non-relativistico si ha

$$|\beta| = \frac{v}{c} \ll 1$$

Quindi, l'ampiezza del contributo del campo di velocità del campo \vec{E} è

$$E_{vel} \sim \frac{1}{R^3} \cdot R = \frac{1}{R^2}$$

mentre l'ampiezza del campo di radiazione è:

$$E_{rad} \sim \frac{1}{R^3} \cdot \frac{R}{c} \cdot R \cdot \ddot{\beta} = \frac{\ddot{v}}{R c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{rad}}{E_{vel}} \sim \frac{R \ddot{v}}{c^2}$$

Se la particella ha una frequenza caratteristica di oscillazione ν , sarà $\ddot{v} \sim \nu^2 v$, cioè

$$\frac{E_{rad}}{E_{vel}} \sim \frac{R \nu^2 v}{c^2} = \frac{\nu R}{c \lambda}$$

- $R \lesssim \lambda$: E_{vel} domina su E_{rad} della quantità $\sim c/\nu$
 \Rightarrow definire la "zona vicina"
- $R \gtrsim \lambda (\nu/c)^{-1}$: $E_{rad} \gtrsim E_{vel} \Rightarrow$ definisce la "zona lontana" dominata dal regime d'onda

In generale, gli oggetti astrofisici sono sempre così lontani che l'approssimazione di "zona distante" risulta valida, così da poter ignorare il termine di velocità E_{vel} .

In tale approssimazione, si avrà per il campo elettrico

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \frac{\vec{R}}{c} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \vec{\beta}]$$

FIG. 3.3 R-L

Nel caso non relativistico, $\beta \ll 1$:

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{R c^2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}) ; \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\vec{B}_{\text{rad}} = \vec{n} \times \vec{E}_{\text{rad}} \rightarrow \text{la direzione di } \vec{B}_{\text{rad}} \text{ è entrante nella pagina}$$

dove $\vec{n} = \vec{R}/R$. L'ampiezza di \vec{E}_{rad} e di \vec{B}_{rad} sarà

$$E_{\text{rad}} = B_{\text{rad}} = \frac{q \ddot{v}}{R c^2} \sin \theta ; \quad \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}|}$$

Formula di Larmor

Per calcolare la potenza emessa, si calcoli il vettore di Poynting, \vec{S} . Tale vettore ha la direzione di \vec{n} ed ampiezza

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}} = \frac{c}{4\pi} E_{\text{rad}}^2 \vec{n} = \frac{q^2 \ddot{v}^2}{4\pi R^2 c^3} \sin^2 \theta \vec{n}$$

Questa è l'ampiezza del flusso di energia nella direzione \vec{n} in unità di $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^2$

Tale espressione può essere messa nella forma di un coefficiente di emissione. L'energia dW emessa per unità di angolo solido $d\Omega$ intorno ad \vec{n} si calcola moltiplicando il vettore di Poynting per l'area $dA = R^2 d\Omega$ sottratta dal $d\Omega$ alla par. R

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = \frac{q^2 \ddot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta$$

La potenza totale emessa su tutto l'angolo solido si otterrà integrando su $d\Omega$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{q^2 \ddot{v}^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{q^2 \ddot{v}^2}{2c^3} \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2) d\mu$$

In tal modo

$$\boxed{P = \frac{2q^2 \ddot{v}^2}{3c^3}} \rightarrow \text{Formula di Larmor: dà la potenza di emissione per carica singola } q \text{ accelerata.}$$

Si noti che:

1. La potenza è $\propto q^2 \ddot{v}^2$
2. Si ha il pattern caratteristico di dipolo $\propto \sin^2 \theta$, cioè non c'è emissione di radiaz. $\parallel \vec{v}$ ed il massimo di emissione è $\perp \vec{v}$
3. La direzione di \vec{E}_{rad} è determinata da \vec{v} e da \vec{n} . Se l'accelerazione è lungo una linea retta, la radiazione sarà polarizzata linearmente nel piano determinato da \vec{v} ed \vec{n} .

L'approssimazione di dipolo

Se si hanno più particelle, con posizioni \vec{r}_i , velocità \vec{v}_i e cariche q_i , $i=1, \dots, N$, il campo di radiazione a grande distanza si otterrà sommando \vec{E}_{rad} per ciascuna particella.

\Rightarrow Non così semplice poiché le espressioni di cui sopra valgono al tempo ritardato, i quali sono diversi per le diverse particelle.

In alcuni casi, tuttavia, si può ignorare questa complicazione.

Sia L la dimensione del sistema e τ il tempo-scala caratteristico per l'emissione. Le differenze nei tempi ritardati saranno trascurabili quando $\tau \gg L/c$.

Si può caratterizzare τ anche come il tempo-scala sul quale si ha una variazione significativa di \vec{E}_{rad} . Questo determina la frequenza della radiazione emessa:

$$\nu \approx \tau^{-1}$$

$$\Rightarrow \tau \gg L/c \Rightarrow c/\nu = \lambda \gg L$$

cioè se il sistema è più piccolo della λ emessa, si può trascurare la sua dimensione.

τ può anche essere visto come il tempo che impiega una particella a cambiare il suo moto. Se l è la scala tipica dell'orbita della particella, $\tau \approx l/v$. Quindi

$$\tau \gg L/c \Rightarrow \tau/c \ll l/L$$

ma essendo $l \ll L$ ciò implica la condizione di moto non-relativistico, $\tau \ll c$. Usiamo quindi il limite non-relat. per trattare questo caso.

Per un insieme di particelle (FIG. 3.4, R-L)

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \sum_i \frac{q_i}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}_i)}{R_i}$$

A grande distanza dal sistema, $R_i \approx R$:

$$\vec{E}_{\text{rad}} = \frac{1}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \sum_i q_i \vec{v}_i)}{R}$$

\vec{R} è ancora calcolato a tutt'oggi rispetto a un qualunque punto nella regione

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{d})}{R}$$

$$\text{dove } \vec{d} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

è il momento di dipolo della distribuzione di cariche.

Quindi si avrà di nuovo

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta \Rightarrow \boxed{P = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3}} \rightarrow \text{approssimazione di dipolo}$$

\hookrightarrow pattern di dipolo

Spettro di emissione

Si calcoli lo spettro di radiazione emesso nell'approssimazione di dipolo. Per semplicità, assumiamo che \vec{d} sia sempre in una sola direzione.

MOSTRARE FIGURA ~~3.5 di R-L~~ 3.5 di R-L

Si avrà quindi

$$E(t) = \ddot{d}(t) \frac{\sin\theta}{c^2 R}$$

dove $E(t) = |\vec{E}(t)|$ e $d(t) = |\vec{d}(t)|$

~~Nella variabile t , la potenza emessa \bar{P}~~

~~$$\frac{dW}{dA dt} = \frac{c}{4\pi} E^2(t)$$~~

~~Quindi la potenza totale per unità di area \bar{P}~~

~~$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi} \int E^2(t) dt$$~~

Per il teorema di Parseval, la si potrà scrivere in termini della frequenza come

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) E^*(\omega) d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$$

dove $E(\omega) = \mathcal{F}\{E(t)\}$

$$E(\omega) = \frac{1}{(2\pi)} \int E(t) e^{i\omega t} dt ; \quad E(t) = \int E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$E(t) \text{ reale} \Rightarrow E(\omega) = E^*(-\omega)$$

Quindi, l'energia emessa per unità di area sarà

$$\frac{dW}{dA} = c \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega$$

caricchi l'energia per unità di area e di frequenza è

$$\frac{dW}{dA d\omega} = c |E(\omega)|^2$$

Per radiazioni emesse con \vec{d} sempre nella stessa direzione

$$E(t) = \ddot{d}(t) \frac{\sin\theta}{c^2 R}$$

La dipendenza dal tempo di \ddot{d} si riflette nello spettro osservato. In rappresentazione di Fourier:

$$d(t) = \int d(\omega) e^{-i\omega t} d\omega ; \quad \ddot{d}(t) = - \int \omega^2 d(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

caricchi

$$E(\omega) = - \frac{1}{c^2 R} \omega^2 d(\omega) \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{c^3} \omega^4 |d(\omega)|^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{d\omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^3} |d(\omega)|^2$$

→ Proprietà della radiazione di dipolo: lo spettro della radiazione emessa è collegato direttamente alla frequenza di oscillazione del momento di dipolo. Tale proprietà non vale per particelle relativistiche.

90 Radiation from Moving Charges

orbiting in a circle with angular frequency ω_0 , the function $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})$ actually contains frequencies not only at ω_0 but also at all harmonics $2\omega_0, 3\omega_0, \dots$. In the dipole approximation only ω_0 contributes, in the quadrupole approximation only $2\omega_0$ contributes, and so on (see problem 3.7).

3.4 THOMSON SCATTERING (ELECTRON SCATTERING)

An important application of the dipole formula is to the process in which a free charge radiates in response to an incident electromagnetic wave. If the charge oscillates at nonrelativistic velocities, $v \ll c$, then we may neglect magnetic forces, since $E = B$ for an electromagnetic wave. Thus the force due to a *linearly polarized wave* is

$$\mathbf{F} = e\epsilon E_0 \sin \omega_0 t, \quad (3.34)$$

where e is the charge and ϵ is the E-field direction. (See Fig. 3.6.) From Eq. (3.34), we have

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\epsilon E_0 \sin \omega_0 t.$$

In terms of the dipole moment, $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, we have

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}} &= \frac{e^2 E_0}{m} \epsilon \sin \omega_0 t, \\ \mathbf{d} &= -\left(\frac{e^2 E_0}{m\omega_0^2} \right) \epsilon \sin \omega_0 t, \end{aligned}$$

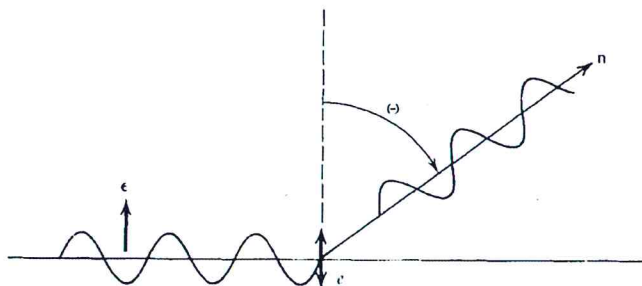


Figure 3.6 Scattering of polarized radiation by a charged particle.

which describes an oscillating dipole of amplitude

$$\mathbf{d}_0 = \frac{e^2 E_0}{m\omega_0^2} \boldsymbol{\epsilon}.$$

From our previous results of Eqs. (3.23), we can write the time-averaged power as

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} \sin^2 \Theta, \quad (3.35a)$$

$$P = \frac{e^4 E_0^2}{3m^2 c^3}, \quad (3.35b)$$

where the time average of $\sin^2 \omega_0 t$ gives a factor $\frac{1}{2}$. Note that the incident flux is $\langle S \rangle = (c/8\pi) E_0^2$. Defining the differential cross section $d\sigma$ for scattering into $d\Omega$ we have

$$\frac{dP}{d\Omega} = \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{cE_0^2}{8\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (3.36)$$

Therefore, we have the relation

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{polarized}} = \frac{e^4}{m^2 c^4} \sin^2 \Theta = r_0^2 \sin^2 \Theta, \quad (3.37)$$

where

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2}. \quad (3.38)$$

The quantity r_0 gives a measure of the "size" of the point charge, assuming its rest energy mc^2 is purely electromagnetic in origin. For an electron r_0 is called the *classical electron radius* and has a value $r_0 = 2.82 \times 10^{-13}$ cm. The total cross section can be found by integrating over solid angle, using $\mu \equiv \cos \Theta$,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi r_0^2 \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu.$$

This gives the result

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2. \quad (3.39)$$

(Alternatively, one can obtain σ from $P = \langle S \rangle \sigma$.)

92 Radiation from Moving Charges

For an electron $\sigma = \sigma_T = \text{Thomson cross section} = 0.665 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$. The above scattering process is then called *Thomson scattering* or *electron scattering*.

Note that the total and differential cross sections above are frequency independent, so that the scattering is equally effective at all frequencies. However, this is really only valid for sufficiently low frequencies, so that a classical description is valid. At high frequencies, where the energy of emitted photons $h\nu$ becomes comparable to or larger than mc^2 , then the quantum mechanical cross sections must be used; this occurs for X-rays of energies $h\nu \gtrsim 0.511 \text{ MeV}$ for electron scattering (see Chapter 7). Also, for sufficiently intense radiation fields the electron moves relativistically; then the dipole approximation ceases to be valid.

We note that the scattered radiation is linearly polarized in the plane of the incident polarization vector ϵ and the direction of scattering \mathbf{n} .

It is easy to get the differential cross section for scattering of *unpolarized radiation* by recognizing that an unpolarized beam can be regarded as the independent superposition of two linear-polarized beams with perpendicular axes. Let us choose one such beam along ϵ_1 , which is in the plane of the incident and scattered directions, and the second along ϵ_2 , perpendicular to this plane. (See Fig. 3.7.) Let Θ be the angle between ϵ_1 and \mathbf{n} . Note that the angle between ϵ_2 and \mathbf{n} is $\pi/2$. We also have introduced the angle $\theta = \pi/2 - \Theta$, which is the angle between the scattered wave and incident wave. Now the differential cross section for unpolarized radiation is the average of the cross sections for scattering of linear-polarized radiation

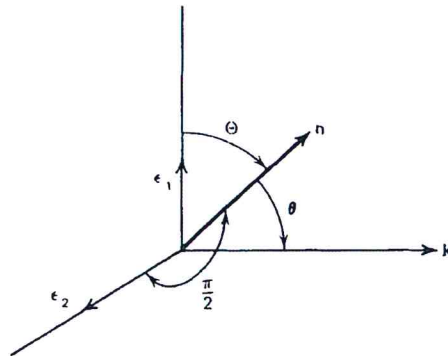


Figure 3.7 Geometry for scattering unpolarized radiation.

through angles Θ and $\pi/2$. Thus we have the result

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{unpol}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right)_{\text{pol}} + \left(\frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}\right)_{\text{pol}} \right] \\ &= \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \sin^2 \Theta) \\ &= \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (3.40)$$

which depends only on the angle between the incident and scattered directions, as it should for unpolarized radiation.

There are several features of electron scattering of unpolarized radiation which we now point out:

1. **Forward-backward symmetry:** The scattering cross section, Eq. (3.40), is symmetric under the reflection $\theta \rightarrow -\theta$.
2. **Total cross section:** The total scattering cross section of unpolarized incident radiation is the same as that for polarized incident radiation $\sigma_{\text{unpol}} = \sigma_{\text{pol}} = (8\pi/3)r_0^2$. This is because the electron at rest has no net direction intrinsically defined.
3. **Polarization of scattered radiation:** The two terms in Eq. (3.40) clearly refer to intensities in two perpendicular directions in the plane normal to \mathbf{n} , since they arise from the two perpendicular components of the incident wave. Since the polarized intensities in the plane and perpendicular to the plane of scattering are in the ratio $\cos^2 \theta : 1$, the degree of polarization of the scattered wave is [cf. Eq. (2.57)]

$$\Pi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (3.41)$$

Since $\Pi \geq 0$, we have the interesting result that electron scattering of a completely unpolarized incident wave produces a scattered wave with some degree of polarization, the degree depending on the viewing angle with respect to the incident direction. If we look along the incident direction ($\theta=0$) we see no net polarization, since, by symmetry, all directions in the plane are equivalent. If we look perpendicular to the incident wave ($\theta=\pi/2$) we see 100% polarization, since the electron's motion is confined to a plane normal to the incident direction.

3.5 RADIATION REACTION

The energy radiated away by an accelerating charge must come from the particle's own energy or from the agency maintaining the particle's energy.